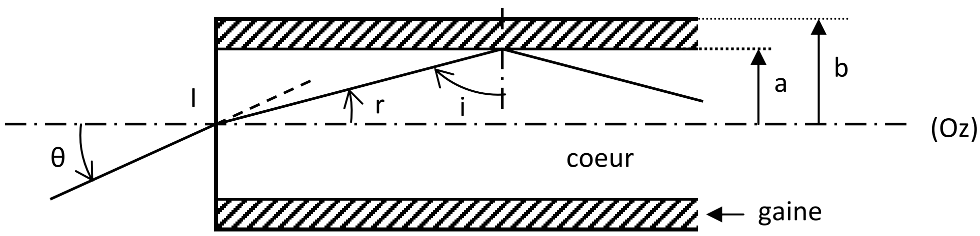
Problème 1 : Fibre Optique à Saut d'indice

Le guidage de la lumière peut être assuré par des fibres optiques. Une fibre optique est constituée d'un cylindre de verre – ou de plastique – appelé cœur, entouré d'une gaine transparente d'indice de réfraction plus faible. La gaine contribue non seulement aux propriétés mécaniques de la fibre, mais évite aussi les fuites de lumière vers l'extérieur. Actuellement, le diamètre du cœur d'une fibre va de 3 à 200µm et le diamètre de la gaine peut aller jusqu'à 400µm.

A. Fibre à Saut d'Indice

Une fibre est constituée d'un cœur cylindrique de rayon a et d'indice n_1, entouré d'une gaine de rayon extérieur de rayon b et d'indice $n_2 < n_1$. Les faces d'entrée et de sortie sont perpendiculaires à l'axe de révolution (Oz) commun au cœur et à la gaine. La fibre est plongée dans l'air, d'indice de réfraction $n_0 = 1{,}00$. Un rayon lumineux arrive en un point I de l'axe (Oz) sur la face d'entrée de la fibre, avec un angle d'incidence θ. On note r l'angle de réfraction en I.



A.1. Montrer que le rayon lumineux est guidé dans le cœur (c'est-à-dire qu'il n'en sort pas) si l'angle i est supérieur à une valeur critique i_C que l'on exprimera en fonction de n_1 et n_2.

A.2. Calculer i_C pour $n_1 = 1{,}456$ (silice) et $n_2 = 1{,}410$ (silicone).

A.3. Exprimer sin(i) en fonction de θ et de n_1.

A.4. En déduire que le rayon incident reste confiné dans la fibre si : $\sin(\theta) < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

A.5. Soit θ_m l'angle d'incidence maximale qui permette la propagation guidée de la lumière dans la fibre. On appelle ouverture numérique ON de la fibre la quantité $\sin(\theta_m)$. Calculer θ_m et ON pour les mêmes indices qu'à la question A.2.

A.6. Quelles sont les valeurs de θ_m en degrés et ON pour une fibre à base d'arséniure de gallium pour lequel $n_1 = 3{,}9$ et $n_2 = 3{,}0$? Commenter.

A.7. L'atténuation de la lumière dans les fibres optiques est due à l'absorption et à la diffusion de la lumière par le matériau constitutif du cœur et par ses impuretés (Fe^{2+}, Cu^{2+}, HO^-). Elle se mesure en décibels par kilomètre : $A_{dB/km} = \dfrac{10}{l_{(km)}} \log\left(\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2}\right)$, où ϕ_1 et ϕ_2 désignent les flux lumineux dans des plans de front successifs distants de l. On parvient couramment à réaliser des fibres dans lesquelles le flux lumineux, après un parcours de 50km, représente 10% du flux incident. Calculer l'atténuation de telles fibres.

B. Transmission par fibre optique à saut d'indice

Lorsqu'on émet une impulsion lumineuse extrêmement brève au niveau de la face d'entrée de la fibre, des rayons lumineux sont émis dans toutes les directions de propagation possible. Il se pose alors le problème de l'élargissement temporel au niveau de la face de sortie, puisque tous les rayons n'arrivent pas en même temps : certains ont un trajet plus long à parcourir que d'autres.

On note L la longueur totale de la fibre et c la vitesse de la lumière dans le vide.

B.1. Exprimer en fonction de L, c et n1 la durée de propagation Δt d'un rayon qui suit l'axe (Oz) sur toute la longueur de la fibre.

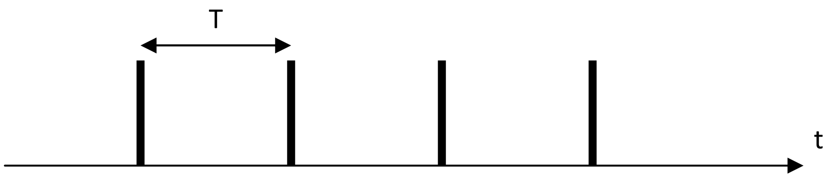
B.2. On considère le rayon d'angle d'incidence maximale θ_m qui « zigzague » dans la fibre sur toute la longueur de la fibre. Exprimer la longueur L' du trajet qu'il suit en fonction de L et de l'angle de réfraction r_m en I.

B.3. Soit $\Delta t'$ la durée de propagation de ce rayon zigzaguant. En déduire que : $\Delta t' = \frac{n_1}{n_2} \Delta t$

B.4. Calculer la différence δt_{max} des durées de propagation des deux rayons particuliers envisagés.

Données : L = 1km, n_1 = 1,456, n_2 = 1,410, et c = $3.10^8 m.s^{-1}$.

B.5. On envoie alors en entrée de la fibre des impulsions lumineuses très brèves avec une période T. Dessiner de la même manière l'allure des impulsions reçues en sortie de la fibre. (en supposant que celles-ci ne se recouvrent pas).

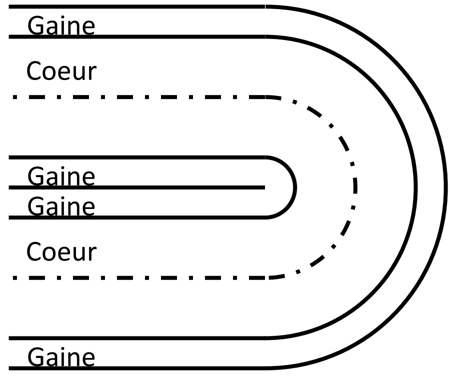


B.6. A quelle fréquence maximale f peut-on émettre des impulsions lumineuses en entrée qui soient « séparées » en sortie ? Calculer la valeur numérique de f.

B.7. En transmission numérique, on exprime le résultat en nombre maximum d'éléments binaires – une impulsion codant un bit 1, une absence d'impulsion un bit 0 – qu'on peut transmettre par seconde. Que vaut le débit en bit/s de cette fibre ? Le comparer au débit du standard téléphone Numéris (64kbit/s) et au standard télévision (100Mbit/s).

C. Problème d'installation

La fibre est maintenant coudée, comme sur la figure ci-contre.



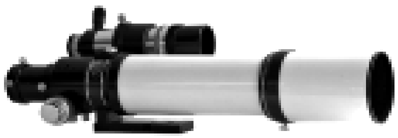
C.1. Expliquez, à l'aide d'un schéma pourquoi une partie des rayons guidés dans la tranche rectiligne ne le sont plus dans la partie coudée.

C.2. On suppose que la fibre optique prend une position extrême en tournant sur elle-même de 180° (voir ci-contre). Trouver la relation entre n1, n2, et les rayons a et b du cœur et de la gaine, qui assure la réflexion totale, dans la partie coudée, d'un rayon axial ($\theta = 0°$).

C.3. Calculer la valeur minimale de b correspondante pour a = 100µm et les indices de la silice et du silicone. Commenter.

Problème 2 : Comparaison des lunettes de Képler et de Galilée

Képler et Galilée ont étudié au début du XVIIè siècle le mouvement des astres. Ils ont mis au point les instruments d´optique que sont les lunettes astronomiques qui portent aujourd´hui leurs noms.



Quelques exemples…

A. Lunette de Képler

En 1611, Képler propose le principe de la lunette astronomique, avec des lentilles convergentes : une pour l´oculaire (coté œil) et une pour l´objectif (coté objet). Il améliore la lunette de Galilée, mais l´image est renversée. On se propose de modéliser cette lunette à l´aide des deux lentilles convergentes suivantes :

- L_1, de distance focale $f_1' = 60$cm
- L_2, de distance focale $f_2' = 10$cm

A.1. Etude de la lentille L_2 (convergente)

A.1.a) Quelle est la vergence de la lentille L_2 ?

A.1.b) Faire une construction graphique représentant la lentille L_2, un objet A_1B_1 situé à $3f_2$ et son image A_2B_2 par L_2. On placera les foyers objets F_2 et image F_2' et on choisira une échelle adaptée, éventuellement différente pour les deux dimensions, par exemple 1/4 pour l´horizontale et 1/1 ou même 2/1 pour la verticale, de manière à avoir un dessin bien explicite.

A.1.c) Retrouver la position de l´image A_2B_2 par le calcul.

A.1.d) Refaire une construction en plaçant l´objet à f_2 de la lentille

A.1.e) Faire une dernière construction en plaçant l´objet à $3f_2/4$.

A.2. Etude d´un modèle de lunette astronomique

On place maintenant la lentille L_1 devant la lentille L_2, pour observer un objet AB. On se place dans le cas où l´image intermédiaire A_1B_1 est située dans le plan focal objet de la lentille L_2. La distance entre les centres optiques des deux lentilles est fixée à 70cm.

A.2.a) Quel rôle joue A_1B_1 pour la lentille L_2 ?

A.2.b) Comment, dans ce système optique, nomme-t-on les lentilles L_1 et L_2 ?

A.2.c) On cherche l´image d´un objet à l´infini B_∞ arrivant avec un angle β. Faire une construction graphique représentant les lentilles L_1 et L_2, leurs foyers objets F_1 et F_2 et image F_1' et F_2', le tracé de deux rayons traversant le système optique, l´image intermédiaire B_1 et l´image finale B_2. On représentera l´angle β tel que l´image intermédiaire soit de taille 1cm.

A.2.d) D´après la construction précédente, où se trouve l´image A_2B_2 ?

A.2.e) Une des caractéristiques de ce système est son grossissement défini par le rapport du diamètre apparent α´ de l´image sur le diamètre apparent α de l´objet : $G = \alpha'/\alpha$. Définir ces deux diamètres apparents et les représenter sur le dessin (donner la relation entre α et β).

A.2.f) Exprimer G en fonction des distances focales des deux lentilles et le calculer. En déduire un moyen d´augmenter le grossissement d´une lunette astronomique.

B. Etude de la lunette de Galilée

La lunette de Galilée est dans le principe semblable à celle de Képler, car elle comprend deux lentilles et a pour but d´obtenir une image à l´infini, ce qui permet à l´oeil de ne pas accomoder. Cependant, l´oculaire est une lentille divergente, ce qui va modifier certaines propriétés de la lunette par rapport à celle de Képler. On se propose de modéliser cette lunette à l´aide des deux lentilles suivantes :

- L_1, de distance focale f_1' = 60cm
- L_2, de distance focale f_2' = -10cm

B.1. Etude de la lentille L_2 (divergente)

B.1.a) Calculer la vergence de la lentille L_2 ?

B.1.b) Faire la construction graphique permettant d´obtenir l´image d´un objet réel A_1B_1 de taille 3cm tel que $\overline{O_2A_1} = -20cm$. En déduire graphiquement la distance $\overline{O_2A_2}$ ainsi que la taille de l´image. Caractériser cette image (Prendre une échelle 1/4 pour l´horizontale, 1/1 pour la verticale).

B.1.c) Retrouver ce résultat à l´aide de calculs.

B.1.d) On souhaite obtenir une image à l´infini à l´aide de la loi de conjugaison. En déduire où se situe l´objet. Caractériser alors l´objet.

B.1.e) Faire le schéma correspondant à cette situation.

B.2. Etude d´un modèle de lunette astronomique

On place maintenant la lentille L_1 devant la lentille L_2, pour observer un objet AB.

B.2.a) On souhaite que le système soit afocal, c´est à dire que l´image obtenue A_2B_2 soit à l´infini. Où doit se situer l'image intermédiaire A_1B_1 par rapport à L_2 ?

B.2.b) On cherche l´image d´un objet à l´infini B_∞ arrivant avec un angle β. Faire une construction graphique représentant les lentilles L_1 et L_2, leurs foyers objets F_1 et F_2 et image F_1' et F_2', le tracé de deux rayons traversant le système optique, l´image intermédiaire B_1 et l´image finale B_2. On représentera l´angle β tel que l´image intermédiaire soit de taille 1cm.

B.2.c) Exprimer G en fonction des distances focales des deux lentilles et le calculer. En déduire un moyen d´augmenter le grossissement de cette lunette astronomique.

C. Comparaison des deux lunettes

C.1. Indiquer, sur les deux schémas finaux obtenus aux questions B.1.2.c) et B.2.2.b), la direction apparente de l´astre pour l´observateur et comparer la valeur absolue de leurs grossissements. En déduire une différence entre les deux lunettes.

C.2. On définit l´encombrement d´une lunette comme la distance entre les centres optiques des lentilles O_1O_2. La définir pour les deux lunettes et la calculer. Quelle est la lunette la moins encombrante ?

C.3. Donner une différence entre les images intermédiaires A_1B_1 obtenues par les deux lunettes. Si jamais les rayons formant l´image intermédiaire ne respectent pas les conditions de Gauss, dans quelle lunette peut-on facilement essayer de les corriger et comment ?

C.4. Proposer une solution pour remettre l´image de la lentille de Képler à l´endroit.