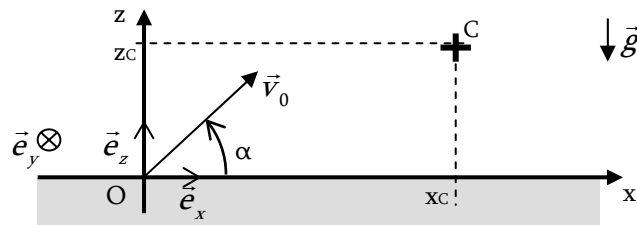


## DM Toussaint – Pour le 06/11/2009

### Exercice 1 : Tir balistique – Allons plus loin – Avec frottement fluide

A l'instant  $t = 0$ , une particule ponctuelle  $M$  est lancée du point  $O$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  située dans le plan  $(Oxz)$  et faisant avec l'horizontale un angle  $\alpha > 0$  susceptible d'être ajusté. Le mouvement de ce point, étudié dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R} (0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ , est tel que son accélération est constante :  $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a} = -g \cdot \vec{e}_z$  avec  $g = \|\vec{g}\| > 0$  constante.

Cette accélération correspond à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ . On a démontré dans le DM précédent (numéro 2) que la trajectoire sans frottement de cette particule est une parabole (voir corrigé). On souhaite maintenant étudier la trajectoire lorsque l'air exerce une force de frottement de type fluide, proportionnelle à la vitesse et de coefficient  $h$  de frottement positif :  $\vec{F}_f = -h \cdot \vec{v}$



1. Appliquer la méthode complète d'étude de la particule  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  supposé galiléen, pour en déduire les équations vérifiées par les composantes de sa vitesse  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ .
2. Préciser sous quelles conditions le référentiel peut vraiment être considéré comme galiléen.
3. Déterminer les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  à l'instant  $t$ . Montrer que cette vitesse tend vers une vitesse limite  $\vec{V}_{lim}$ .
4. Déterminer les équations horaires du mouvement.
5. Déterminer le nouveau sommet de la trajectoire :  $t_s$ ,  $x_s$  et  $z_s$
6. Montrer que la trajectoire a une asymptote verticale à l'abscisse  $x_{lim}$ .
7. Faire un nouveau tableau reportant les coordonnées du sommet, de la portée et de l'asymptote verticale, pour chaque angle  $\alpha \in \{15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ\}$  (à même  $v_0$ ).
8. Faire un graphique pour chaque angle, représentant la trajectoire avec et sans frottement. Commenter. (On pourra tracer ces courbes sur ordinateur – Calc ou Excel – ou à la main).

### Suggestions pour les tableaux et les courbes :

Il vaudra mieux prendre des valeurs numériques pour avoir des tableaux exploitables plus facilement :

$$\begin{cases} m = 1 \text{ kg} \\ h = 0,2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{cases}$$

**Conseil pour le tracé des courbes :** Utiliser les courbes de type XY, en définissant dans le tableau pour chaque valeur de  $x$ , la valeur de  $z$  correspondante. On préférera donc travailler avec les équations des trajectoires, plutôt qu'avec les équations horaires du mouvement...

### Impression des courbes exigées :

→ **Courbe 1 :** Sans frottement,  $h = 0$ , on fait varier l'angle de lancement à  $v_0$  constant  
 $\alpha \in \{15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 85^\circ\}$   
 (Déjà tracée pour le DM2 – On la fait maintenant sur PC)

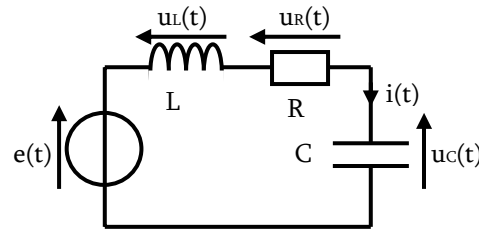
→ **Courbe 2 :** Pour  $\alpha = 45^\circ$ , on fait varier  $h$   
 $h \in \{0; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3; 0.5; 1\}$   
 (Pour répondre à la question 8)

→ **Courbe Supplémentaire :** Avec frottement,  $h = 0.2$ , on fait varier l'angle de lancement à  $v_0$  constant  
 $\alpha \in \{15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ\}$   
 (Non demandé dans les questions du DM)

Commenter : Quelle est la différence avec la courbe 1 ? Est-ce encore l'angle  $\alpha = 45^\circ$  qui donne la meilleure portée ? Et si  $h = 0,5$  ?

**Exercice 2 : Etude d'un circuit RLC**

On souhaite étudier le même circuit RLC série que celui déjà vu en TP. On redonne le schéma ci-contre, dans lequel  $R = 1k\Omega$ ,  $L = 1H$  et  $C = 10nF$  :



- Remettez l'équation vérifiée par  $u_c(t)$  sous la forme canonique suivante, en précisant les valeurs de la pulsation propre  $\omega_0$  et du coefficient d'amortissement  $\sigma$  en fonction des composants  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + 2\sigma\omega_0 \frac{du_c(t)}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = \omega_0^2 E$$

- Rappeler ce qu'est l'équation caractéristique, et pourquoi on doit la résoudre.
- Cas n°1 :** On prend  $\sigma = 0,05$  (ce qui correspond aux valeurs du TP)
  - Résoudre l'équation caractéristique.
  - En déduire les solutions pour  $u_c^{SSM}(t)$  (s'aider des exos techniques)
  - Finir la résolution (solution part et CI), et montrer que la solution peut se mettre sous les deux formes : (en utilisant les deux formes possibles pour la solution SSM)

$$\Rightarrow u_c(t) = E - Ee^{-\sigma\omega_0 t} \left( \cos(\omega_{pp}t) + \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} \sin(\omega_{pp}t) \right)$$

Créneau d'amplitude E
Enveloppe exponentielle
×
Fonction sinusoïdale de pseudo-pulsation  $\omega_{pp}$

Ou :

$$\Rightarrow u_c(t) = E - Ee^{-\sigma\omega_0 t} \left( \frac{\cos(\omega_{pp}t + \varphi)}{\cos(\varphi)} \right) \text{ avec } \tan \varphi = \frac{-\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}$$

- On voit que cette fonction complexe est composée de 3 fonctions plus simples. Tracer ces trois fonctions simples séparément sur un graphique (Bien respecter l'échelle de temps, avec les valeurs de  $\omega_0$ ,  $\sigma$ , et  $\omega_{pp}$  correspondantes aux valeurs des composants pris ici)
- Tracer ensuite l'ensemble de cette fonction (on pourra le faire sur Excel ou Calc...), et comparer à la courbe que vous avez visualisé en TP.

- Cas n°2 :** On prend  $\sigma = 1$  (ne correspond plus aux valeurs du TP)
  - Si on fixe  $C = 100nF$  et  $L = 1H$ , quelle est la résistance  $R_c$ , appelée résistance critique nous permettant d'être dans ce régime ?
  - Résoudre de nouveau l'équation caractéristique avec les nouvelles valeurs.
  - En déduire les solutions pour  $u_c^{SSM}(t)$  (s'aider des exos techniques)
  - Finir la résolution (solution part et CI). (Beaucoup plus simple)
  - Tracer la courbe directement en calculant les coordonnées de plusieurs points au cours du temps (Peut se faire sur PC également)
- Cas n°3 :** On prend  $\sigma = 5$  (ne correspond plus non plus aux valeurs du TP)
  - Si on fixe  $C = 100nF$  et  $L = 1H$ , quelle doit être la valeur de  $R$  pour se trouver dans ce cas ? La comparer avec  $R_c$ .
  - Résoudre de nouveau l'équation caractéristique avec les nouvelles valeurs.
  - En déduire les solutions pour  $u_c^{SSM}(t)$  (s'aider des exos techniques)
  - Finir la résolution (solution part et CI). (Beaucoup plus simple également)
  - Tracer la courbe directement en calculant les coordonnées de plusieurs points au cours du temps (Peut se faire sur PC également)
- Comparaison :** Superposer les 3 courbes obtenues sur le même graphique (→ Utilité de les tracer sur PC)
 

→ Comparer les courbes des régimes aperiodiques et critiques. Quelle est la plus rapide ?