TSI2 / DS1-2008-2009 / corrigé.

1) Donner les ensembles de définitions, et les expressions en fonctions usuelles correspondantes de :

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$; *b*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{3n}$; *c*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; *d*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$; *e*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; *f*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{2n+1}$; *g*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$; *h*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$;

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \frac{x^{3n+2}}{3n+2})$.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in]-1, 1[$; *b*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}$ pour $x \in]-1, 1[$; *c*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pour $x \in [-1,1[$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = -\frac{1}{2}.\ln(1-x^2)$ pour $x \in]-1,1[$;

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = -\ln(1-x) + \frac{1}{2}.\ln(1-x^2) = \frac{1}{2}.\ln(\frac{1+x}{1-x}) = \mathrm{Argth}(x)$ pour x $]-1, 1[$;

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{2n+1} = \mathrm{Arctan}(x)$ pour $x \in [-1, 1]$, c'est la primitive de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en 0.

g et h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ est la primitive de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$ qui s'annule en 0, mais il y a plus simple :

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \frac{x^{4n+3}}{4n+3}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \mathrm{Argth}(x)$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{x^{4n+3}}{4n+3}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{2n+1} = \mathrm{Arctan}(x)$.

Il s'en suit que : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{1}{2}.(\mathrm{Argth}(x) + \mathrm{Arctan}(x))$, et : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3} = \frac{1}{2}.(\mathrm{Argth}(x) - \mathrm{Arctan}(x))$, pour $x \in]-1, 1[$.

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \frac{x^{3n+2}}{3n+2}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n} = -\ln(1-x) + \frac{1}{3}.\ln(1-x^3) = \frac{1}{3}.\ln(1+x+x^2) - \frac{2}{3}.\ln(1-x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

2) *a*) Trouver les réels a, b, c tels que : $\frac{1}{1-x^3} = \frac{a}{x-1} + b.\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{c}{x^2+x+1}$.

On peut trouver a en multipliant les deux membres de l'équation par $x - 1$ et en posant ensuite $x = 1$:

$\frac{-1}{x^2+x+1} = a + (x-1).(b.\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{c}{x^2+x+1})$, d'où : $a = -\frac{1}{3}$.

On peut trouver b en multipliant les deux membres de l'équation par $1 + x + x^2$ et en posant ensuite $x = j$, ou en réduisant au même dénominateur :

$\frac{1}{1-x^3} = \frac{(1+x+x^2)/3 + (1-x)(b.(2x+1)+c)}{1-x^3}$, d'où : $\frac{1}{1-x^3} = -\frac{1}{3}.\frac{1}{x-1} + \frac{1}{6}.\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{x^2+x+1}$.

b) Trouver les réels α, β, γ tels que : $\frac{c}{x^2+x+1} = \alpha.\frac{\beta}{(\beta x+\gamma)^2+1}$.

$\frac{1}{2}.\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{2/\sqrt{3}}{((2x+1)/\sqrt{3})^2+1}$.

c) En déduire les expressions en fonctions usuelles de : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$, et : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ est la primitive qui s'annule en 0 de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3} = -\frac{1}{3}.\frac{1}{x-1} + \frac{1}{6}.\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{2/\sqrt{3}}{((2x+1)/\sqrt{3})^2+1}$. Donc :

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = -\frac{1}{3}.\ln(1-x) + \frac{1}{6}.\ln(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}.\mathrm{Arctan}((2x+1)/\sqrt{3}) + k$, où $\frac{1}{\sqrt{3}}.\mathrm{Arctan}(1/\sqrt{3}) + k = 0$, c'est-à-dire :

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \frac{1}{6}.\ln(1+x+x^2) - \frac{1}{3}.\ln(1-x) + \frac{1}{\sqrt{3}}.\mathrm{Arctan}((2x+1)/\sqrt{3}) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ pour $x \in [-1, 1[$.

Et : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2} = \frac{1}{3}.\ln(1 + x + x^2) - \frac{2}{3}.\ln(1 - x) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1} =$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2} = \frac{1}{6}.\ln(1 + x + x^2) - \frac{1}{3}.\ln(1 - x) - \frac{1}{\sqrt{3}}.\text{Arctan}((2x + 1)/\sqrt{3}) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ pour $x \in [-1, 1[$.

3) Pour $x \in\,]-1, 1[$, on note $f_{p,q}(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{pn+q}}{pn+q} & \text{si } q \neq 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{pn}}{pn} & \text{si } q = 0 \ (p \neq 0)\end{cases}$. Donner les conditions sur p, p', q, q' pour que $f_{p,q}$ et $f_{p',q'}$ soient linéairement indépendants.

Comme ni l'un ni l'autre ne sont nuls, on cherche un réel λ tel que : $f_{p',q'} = \lambda.f_{p,q}$. On introduit $a = q$ si $q \neq 0$ et $a = p$ si $q = 0$, de même $a' = q'$ si $q' \neq 0$ et $a' = p'$ sinon ; on doit alors avoir : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{pn+a}}{pn+a} = \lambda.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{p'n+a'}}{p'n+a'}$.

Comme c'est une égalité de séries entières et que $\lambda \neq 0$, s'il existe un entier m qui peut se mettre sous la forme $pn + a$ mais pas $p'n' + a'$, ou qui peut se mettre sous la forme $p'n' + a'$ mais pas $pn + a$, alors cette égalité est impossible. Par exemple, les premiers termes doivent être les mêmes, à savoir : $\frac{x^a}{a} = \lambda.\frac{x^{a'}}{a'}$, d'où l'on déduit : $a = a'$ et $\lambda = 1$. Ensuite, les termes suivants doivent être les mêmes, à savoir : $\frac{x^{p+a}}{p+a} = \frac{x^{p'+a}}{p'+a}$, d'où l'on déduit : $p = p'$.

Finalement, la seule possibilité est que $p = p'$ et $q = q'$.

Conclusion : $f_{p,q}$ et $f_{p',q'}$ sont linéairement indépendants si et seulement si : $p \neq p'$ ou $q \neq q'$.

4) Soit, pour $p \neq 0$: $E_p = \text{Vect}(\bigcup_{q=0}^{p-1}\{f_{p,q}\})$, et soit $p' \neq p$ $(p' \neq 0)$; montrer que : $f_{1,0} \in E_p \cap E_{p'}$.

$f_{1,0}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux familles : $f_{1,0} = \sum_{q=0}^{p-1} f_{p,q} = \sum_{q=0}^{p'-1} f_{p',q}$, donc : $f_{1,0} \in E_p \cap E_{p'}$.

À noter : $f_{1,0}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1 - x)$; les combinaisons linéaires précédentes reviennent à décomposer cette somme en partitionnant $\mathbb{N}$ selon les divisions par p : les multiples de p, les entiers dont le reste est 1, puis 2, jusqu'à $p - 1$. (Idem pour p').

5) Soit $g_{p,q,p',q'}(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{pn+q}}{pn+q} - \frac{x^{p'n+q'}}{p'n+q'}\right) & \text{si } q \neq 0 \text{ et } q' \neq 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{pn+q}}{pn+q} - \frac{x^{p'n+q'}}{p'n+q'}\right) & \text{si } (q = 0 \text{ et } p \neq 0) \text{ ou } (q' = 0 \text{ et } p' \neq 0)\end{cases}$. Donner les conditions sur p, p', q, q' pour que $g_{p,q,p',q'}(1)$ converge. Lorsque ces conditions sont réunies, sur quel ensemble a-t-on l'égalité entre $g_{p,q,p',q'}$ et $f_{p,q} - f_{p',q'}$?

Soit $m = 0$ si $q \neq 0$ et $q' \neq 0$, $m = 1$ sinon ; on veut que $\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{1}{pn+q} - \frac{1}{p'n+q'}\right)$ converge, c'est-à-dire :

$\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{1}{pn+q} - \frac{1}{p'n+q'}\right) = \sum_{n=m}^{\infty}\frac{(p'-p)n + q' - q}{pp'n^2 + (pq' + qp')n + qq'}$. Si $p \neq p'$, alors cette série est de même nature que la série de terme général $\frac{1}{n}$, qui diverge. Il est donc nécessaire que $p' = p$, donc : $g_{p,q,p,q'}(1) = \sum_{n=m}^{\infty}\frac{q' - q}{p^2n^2 + p(q + q')n + qq'}$; soit cette série est nulle si $q' = q$, soit elle est de même nature que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, qui converge.

Conclusion : $g_{p,q,p',q'}(1)$ converge si et seulement si : $p = p'$.

$g_{p,q,p',q'} = f_{p,q} - f_{p',q'}$ sur $]-1, 1[$ car, même si $g_{p,q,p',q'}(1)$ converge, il n'est pas permis de l'écrire sous forme de somme de deux séries divergentes.

6) Soit $u_n(p, q) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{pk + q} & \text{si } q \neq 0 \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{pk} & \text{si } q = 0 \ (p \neq 0) \end{cases}$. Montrer que $v_n = u_n(1, 0) - \ln(n + 1)$ et $w_n = u_n(1, 0) - \ln(n)$ sont adjacentes ; en déduire qu'elles convergent. On note γ leur limite commune ($\gamma \approx 0{,}577$).

Il est clair que $v_n < w_n$ pour tout n ; $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n + 1} + \ln(\frac{n}{n + 1}) = \frac{1}{n + 1} + \ln(1 - \frac{1}{n + 1})$. Il faut donc étudier la fonction $f(x) = x + \ln(1 - x)$ quand $x \in [0, 1[$; $f'(x) = 1 + \frac{1}{x - 1} = \frac{x}{x - 1} < 0$, la fonction décroît donc de $f(0) = 0$ à la limite en 1 qui est $-\infty$. Cette fonction étant négative, il s'en suit que (w_n) est décroissante.

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n + 1} - \ln(\frac{n + 2}{n + 1}) = \frac{1}{n + 1} - \ln(1 + \frac{1}{n + 1})$. Il faut, cette fois, étudier la fonction $g(x) = x - \ln(1 + x)$, quand $x \in [0, 1]$; $g'(x) = 1 - \frac{1}{x + 1} = \frac{x}{x + 1} > 0$, la fonction croît donc de $g(0) = 0$ à $g(1) = 1 - \ln(2)$. Cette fonction étant positive, il s'en suit que (v_n) est croissante.

$w_n - v_n = \ln(1 + 1/n)$ dont la limite quand n tend vers $+\infty$ est nulle ; les suites sont donc adjacentes et admettent une limite commune.

7) Trouver le réel λ tel que $(u_n(p, 0) - \lambda.\ln(n))$ converge. Montrer que $(u_n(p, q) - u_{n+1}(p, 0))$ converge ; en déduire le réel λ tel que $(u_n(p, q) - \lambda.\ln(n))$ converge.

Si $q = 0$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{pk} = \frac{1}{p}.\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, donc $\frac{1}{p}.(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)) + (\frac{1}{p} - \lambda).\ln(n)$ converge si $\lambda = \frac{1}{p}$.

Si $q = 0$: $u_n(p, q) - u_{n+1}(p, 0) = u_n(p, 0) - u_{n+1}(p, 0) = \frac{-1}{p(n + 1)}$ converge.

Si $q \neq 0$: Soit $x_n = u_n(p, q) - u_{n+1}(p, 0) = \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{pk + q} - \frac{1}{p(k+1)}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p - q}{p(k + 1)(pk + q)}$ dont le terme général est celui d'une série de même nature que, soit la série nulle si $p = q$, soit la série de terme général $1/n^2$ qui est convergente. Il s'en suit que (x_n) converge.

Par suite $((u_n(p, q) - \frac{1}{p}.\ln(n)) - (u_n(p, 0) - \frac{1}{p}.\ln(n)))$ converge donc $(u_n(p, q) - \frac{1}{p}.\ln(n))$ converge, $\lambda = \frac{1}{p}$.

8) Pour $x \in [-1, 1[$, soit $h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \ln(1 + \frac{1}{n} - x)$; calculer : $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} h_n(x)$, et : $\lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} h_n(x)$.

$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)) = \gamma$; $\lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{x\to 1} (-\ln(1 - x) + \ln(1 - x)) = 0$.

9) Donner un développement limité à l'ordre n en 0 de $h_n(x)$.

$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \ln(1 + \frac{1}{n}) + \ln(1 - \frac{nx}{n + 1}) = \ln(1 + \frac{1}{n}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.(\frac{nx}{n + 1})^k + o(x^n) =$

$h_n(x) = \ln(1 + \frac{1}{n}) + (1 - \frac{n}{n + 1}).x + (1 - (\frac{n}{n + 1})^2).\frac{x^2}{2} + \ldots + (1 - (\frac{n}{n + 1})^n).\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

10) *a*) Pour $n \geq 1$, montrer qu'on peut prolonger $\phi_n(k) = \frac{1}{k}.(1 - (\frac{n}{n + 1})^k)$ par continuité en posant $\phi_n(0) = \ln(1 + \frac{1}{n})$.

La limite de ϕ_n en 0 est l'opposé du nombre dérivé en 0 de la fonction $\psi(k) = (\frac{n}{n + 1})^k$, c'est-à-dire, comme $\psi'(k) = \ln(\frac{n}{n + 1}).(\frac{n}{n + 1})^k$: $\lim_{\substack{k\to 0 \\ k>0}} \phi_n(k) = -\psi'(0) = \ln(1 + \frac{1}{n})$. On peut donc bien faire le prolongement par continuité en 0.

b) Montrer que, pour tout $k \geq 0$, $(\phi_n(k))$ admet pour limite 0 quand n tend vers l'infini.

Soit $n \geq 1$; $\phi_n(k) = \frac{1}{k}.(1 - (\frac{1}{1 + 1/n})^k)$ dont la limite quand n tend vers l'infini est de toute évidence 0.

c) Déterminer la nature de la série : $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(n)$.

Quand n assez grand, $\phi_n(n) = \frac{1}{n}.(1 - (1 + \frac{1}{n})^{-n})$; en posant $x = \frac{1}{n}$:

$\phi_n(n) = x.(1 - e^{-\ln(1 + x)/x}) = x.(1 - e^{-1 + o(1)}) = x.(1 - 1/e + o(1))) = x.(1 - 1/e) + o(x) = \frac{1}{n}.(1 - 1/e) + o(\frac{1}{n})$.

Il s'en suit que cette série est de même nature que la série harmonique, elle diverge donc vers $+\infty$.

11) Pour $x \in]-1, 1[$, soit $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_n(k).x^k$; donner le développement en série entière de $P_n(x) - h_n(x)$, et la limite quand n tend vers l'infini de $P_n(x) - h_n(x)$, puis celle de $P_n(x)$.

$P_n(x) - h_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{n}{n + 1})^k.\frac{x^k}{k}$. Comme $0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{n}{n + 1})^k.\frac{|x|^k}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k}$, et que le membre de droite est le reste de la série entière de $-\ln(1 - |x|)$ quand $|x| < 1$, ce reste tend vers 0. Il s'en suit que, pour $x \in]-1, 1[$:

$\lim_{n\to\infty} (P_n(x) - h_n(x)) = 0$.

Comme la limite de $h_n(x)$ est nulle, on en déduit : $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 0$.

12) Montrer que : $(1 + \frac{1}{n})(1 - (\frac{n}{n + 1})^n) \leq P_n(1) \leq (n + 1).\ln(1 + \frac{1}{n})$. En supposant qu'elle converge, la suite $(P_n(1))$ peut-elle admettre la même limite que $(h_n(1))$?

D'après la question 10b), ϕ_n est décroissante sur $[0, +\infty[$; donc : $\sum_{k=0}^{n} \phi_n(n) \leq \sum_{k=0}^{n} \phi_n(k) \leq \sum_{k=0}^{n} \phi_n(0)$, d'où :

$(1 + \frac{1}{n})(1 - (\frac{n}{n + 1})^n) \leq P_n(1) \leq (n + 1).\ln(1 + \frac{1}{n})$.

Si $(P_n(1))$ converge vers une limite a, alors, en faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité précédente :

$\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n + 1})^n = \lim_{n\to\infty} e^{-n.\ln(1 + 1/n)} = 1/e$, donc : $1 - 1/e \leq a \leq 1$; et comme : $\lim_{n\to\infty} h_n(1) = \gamma < 1 - 1/e$, alors, même si $(P_n(1))$ convergeait, ce ne serait pas vers la même limite que $(h_n(1))$.

- *Remarque* : On remplace le $\ln(1 + 1/n)$ par le développement en série entière de $-\ln(1 - 1/(n + 1))$:

$P_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \phi_n(k) = \ln(1 + \frac{1}{n}) + \sum_{k=1}^{n} \phi_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)^k}.\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \phi_n(k) = \sum_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{(n + 1)^k} - (\frac{n}{n + 1})^k).\frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)^k}.\frac{1}{k}$.

Comme la dernière somme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $(P_n(1))$ est de même nature que (u_n), avec $u_n = \sum_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{(n + 1)^k} - (\frac{n}{n + 1})^k).\frac{1}{k}$.

Ainsi : $u_n - u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{(n + 1)^k} - (\frac{n}{n + 1})^k - \frac{1}{n^k} + (\frac{n - 1}{n})^k).\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} ((n^2 - 1)^k - n^{2k} + n^k - (n + 1)^k).\frac{1}{k.n^k(n + 1)^k}$.

Le signe de la parenthèse est donné par le terme dominant qui est : $-k.n^{2k-2}$ (ça reste vrai pour $k = 1$ où la parenthèse vaut -2) ; on en conclut que $u_n - u_{n-1} < 0$ (pour n assez grand), la suite (u_n) est alors décroissante, à partir d'un certain rang, et minorée, donc convergente. Il en est donc de même de la suite $(P_n(1))$.