

# TSI2 / DS1-2008-2009.

1) Donner les ensembles de définitions, et les expressions en fonctions usuelles correspondantes de :

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ; b)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$ ; c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ; d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$ ; e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ; f)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1}$ ; g)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ ; h)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$ ;  
 i)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \frac{x^{3n+2}}{3n+2} \right)$ .

2) a) Trouver les réels  $a, b, c$  tels que :  $\frac{1}{1-x^3} = \frac{a}{x-1} + b \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{c}{x^2+x+1}$ .

b) Trouver les réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que :  $\frac{c}{x^2+x+1} = \alpha \cdot \frac{\beta}{(\beta x + \gamma)^2 + 1}$ .

c) En déduire les expressions en fonctions usuelles de :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ , et :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$ .

3) Pour  $x \in ]-1, 1[$ , on note  $f_{p,q}(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{pn+q}}{pn+q} & \text{si } q \neq 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{pn}}{pn} & \text{si } q = 0 \text{ (} p \neq 0 \text{)} \end{cases}$ . Donner les conditions sur  $p, p', q, q'$  pour que  $f_{p,q}$  et  $f_{p',q'}$  soient linéairement indépendants.

4) Soit, pour  $p \neq 0$  :  $E_p = \text{Vect}(\bigcup_{q=0}^{p-1} \{f_{p,q}\})$ , et soit  $p' \neq p$  ( $p' \neq 0$ ) ; montrer que :  $f_{1,0} \in E_p \cap E_{p'}$ .

5) Soit  $g_{p,q,p',q'}(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x^{pn+q}}{pn+q} - \frac{x^{p'n+q'}}{p'n+q'} \right) & \text{si } q \neq 0 \text{ et } q' \neq 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^{pn+q}}{pn+q} - \frac{x^{p'n+q'}}{p'n+q'} \right) & \text{si } (q=0 \text{ et } p \neq 0) \text{ ou } (q'=0 \text{ et } p' \neq 0) \end{cases}$ . Donner les conditions sur  $p, p', q, q'$  pour que  $g_{p,q,p',q'}(1)$  converge. Lorsque ces conditions sont réunies, sur quel ensemble a-t-on l'égalité entre  $g_{p,q,p',q'}$  et  $f_{p,q} - f_{p',q'}$  ?

6) Soit  $u_n(p, q) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \frac{1}{pk+q} & \text{si } q \neq 0 \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{pk} & \text{si } q = 0 \text{ (} p \neq 0 \text{)} \end{cases}$ . Montrer que  $v_n = u_n(1, 0) - \ln(n+1)$  et  $w_n = u_n(1, 0) - \ln(n)$  sont adjacentes ; en déduire qu'elles convergent. On note  $\gamma$  leur limite commune ( $\gamma \approx 0,577$ ).

7) Trouver le réel  $\lambda$  tel que  $(u_n(p, 0) - \lambda \cdot \ln(n))$  converge. Montrer que  $(u_n(p, q) - u_{n+1}(p, 0))$  converge ; en déduire le réel  $\lambda$  tel que  $(u_n(p, q) - \lambda \cdot \ln(n))$  converge.

8) Pour  $x \in [-1, 1[$ , soit  $h_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + \ln(1 + \frac{1}{n} - x)$  ; calculer :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1} h_n(x)$ , et :  $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$ .

9) Donner un développement limité à l'ordre  $n$  en  $0$  de  $h_n(x)$ .

10) a) Pour  $n \geq 1$ , montrer qu'on peut prolonger  $\phi_n(k) = \frac{1}{k} \cdot (1 - (\frac{n}{n+1})^k)$  par continuité en posant  $\phi_n(0) = \ln(1 + \frac{1}{n})$ .

b) Montrer que, pour tout  $k \geq 0$ ,  $(\phi_n(k))$  admet pour limite  $0$  quand  $n$  tend vers l'infini.

c) Déterminer la nature de la série :  $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(n)$ .

11) Pour  $x \in ]-1, 1[$ , soit  $P_n(x) = \sum_{k=1}^n \phi_n(k) \cdot x^k$  ; donner le développement en série entière de  $P_n(x) - h_n(x)$ , et la limite quand  $n$  tend vers l'infini de  $P_n(x) - h_n(x)$ , puis celle de  $P_n(x)$ .

12) Montrer que :  $(1 + \frac{1}{n})(1 - (\frac{n}{n+1})^n) \leq P_n(1) \leq (n+1) \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})$ . En supposant qu'elle converge, la suite  $(P_n(1))$  peut-elle admettre la même limite que  $(h_n(1))$  ?