

## TSI2 / DS1-2009-2010.

On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$u_1 = v_1 = 0$ ,  $u_2 = v_2 = 1$ ,  $u_{n+2} = u_n + \frac{u_{n+1}}{n}$ ,  $v_{n+2} = \frac{v_n}{n} + v_{n+1}$ . (Elles sont appelées : *suites en miroir*).

I.1) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $u_{2n} = u_{2n+1}$ .

I.2) En déduire une expression de  $u_{2n+2}$  en fonction de  $u_{2n}$ , puis l'expression de  $u_{2n}$  en fonction de  $n$ .

I.3) En déduire que :  $u_{2n+1} = u_{2n} = \frac{2n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ .

I.4) On admet l'équivalent, quand  $n$  assez grand :  $\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$  ; en déduire la limite de  $\frac{2n}{u_n^2}$  quand  $n$  tend vers l'infini.

II.1) On considère la série entière :  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n x^n$  ; montrer que, pour  $x \neq 0$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{n+2} x^n = \frac{f(x)}{x^2} - 1.$$

II.2) Exprimer de même, le plus simplement possible :  $\sum_{n=1}^{\infty} v_{n+1} x^n$ .

II.3) Soit  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n$  ; exprimer sa dérivée  $g'(x)$  en fonction de  $f(x)$ .

II.4) En déduire que  $f$  est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E) : x(x-1).y' + (x^2 - x + 2).y = 0.$$

II.5) Résoudre l'équation différentielle (E), et en déduire que :  $f(x) = \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{(x-1)^2}$ .

II.6) Montrer que :  $g(x) = \int_0^x \frac{f(t).dt}{t} = \frac{e^{-x}}{1-x} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) \cdot x^n$ .

II.7) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $v_n = n \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ , puis la limite de  $\frac{n}{v_n}$ .

III) *Généralisation d'une propriété utilisée à la question II.6 :*

Soit la série entière  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , de rayon de convergence  $R$  ; montrer que, pour tout réel

$x$  tel que  $|x| < \inf\{R, 1\}$  :  $\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) \cdot x^n$ .