TSI2 / DS1-2009-2010 / corrigé.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier naturel n non nul par :

$u_1 = v_1 = 0$, $u_2 = v_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + \frac{u_{n+1}}{n}$, $v_{n+2} = \frac{v_n}{n} + v_{n+1}$. (Elles sont appelées : *suites en miroir*).

I.1) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_{2n} = u_{2n+1}$.

- *Corrigé* : Par récurrence sur n, initialisation $u_3 = u_1 + u_2/1 = 1 = u_2$.

On suppose la propriété vraie jusqu'à n : $u_{2n} = u_{2n+1}$; au rang suivant :

$u_{2n+2} = u_{2n} + \frac{u_{2n+1}}{2n} = \frac{(2n+1)u_{2n}}{2n}$, $u_{2n+3} = u_{2n+1} + \frac{u_{2n+2}}{2n+1} = u_{2n} + \frac{u_{2n}}{2n} = \frac{(2n+1)u_{2n}}{2n} = u_{2n+2}$.

La propriété est donc vraie pour tout n non nul.

I.2) En déduire une expression de u_{2n+2} en fonction de u_{2n}, puis l'expression de u_{2n} en fonction de n.

- *Corrigé* : Comme on l'a montré à la question précédente : $u_{2n+2} = \frac{(2n+1)u_{2n}}{2n}$.

On en déduit : $u_{2n} = \frac{(2n-1)u_{2n-2}}{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}.u_{2n-4} = \ldots = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2}.u_2 = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2} = \frac{2n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

I.3) En déduire que : $u_{2n+1} = u_{2n} = \frac{2n}{2^{2n}}.\binom{2n}{n}$.

- *Corrigé* : Démontré à la question précédente.

I.4) On admet l'équivalent, quand n assez grand : $\frac{1}{2^{2n}}.\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$; en déduire la limite de $\frac{2n}{u_n^2}$ quand n tend vers l'infini.

- *Corrigé* : On a ainsi, pour n assez grand : $u_{2n} \sim 2\sqrt{n/\pi}$, donc : $u_n \sim \sqrt{2n/\pi}$, puis : $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{u_n^2} = \pi$.

II.1) On considère la série entière : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n x^n$; montrer que, pour $x \neq 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} v_{n+2} x^n = \frac{f(x)}{x^2} - 1$.

- *Corrigé* : $\sum_{n=1}^{\infty} v_{n+2} x^n = \frac{1}{x^2}.\sum_{n=1}^{\infty} v_{n+2} x^{n+2} = \frac{1}{x^2}.\sum_{n=3}^{\infty} v_n x^n = \frac{1}{x^2}.(\sum_{n=1}^{\infty} v_n x^n - v_2 x^2 - v_1 x) = \frac{1}{x^2}.(f(x) - x^2) = \frac{f(x)}{x^2} - 1$.

II.2) Exprimer de même, le plus simplement possible : $\sum_{n=1}^{\infty} v_{n+1} x^n$.

- *Corrigé* : $\sum_{n=1}^{\infty} v_{n+1} x^n = \frac{1}{x}.\sum_{n=1}^{\infty} v_{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{x}.\sum_{n=2}^{\infty} v_n x^n = \frac{1}{x}.(\sum_{n=1}^{\infty} v_n x^n - v_1 x) = \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ (Ça vaut $0 = f(0)$ si $x = 0$).

II.3) Soit $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n$; exprimer sa dérivée $g'(x)$ en fonction de $f(x)$.

- *Corrigé* : $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n x^{n-1} = \frac{1}{x}.\sum_{n=1}^{\infty} v_n x^n = \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$, $g'(0) = 0 = f(0)$.

II.4) En déduire que f est solution de l'équation différentielle (E) : $x(x - 1).y' + (x^2 - x + 2).y = 0$.

- *Corrigé* : On introduit la récurrence définissant la suite (v_n) dans les signes Σ :

$\sum_{n=1}^{\infty} v_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} v_{n+1}x^n$, d'où : $\frac{f(x)}{x^2} - 1 = g(x) + \frac{f(x)}{x}$.

On dérive : $\frac{x.f'(x) - 2.f(x)}{x^3} = g'(x) + \frac{x.f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} + \frac{x.f'(x) - f(x)}{x^2}$; on multiplie par x^3 :

$x.f'(x) - 2.f(x) = x^2.f(x) + x^2.f'(x) - x.f(x)$, d'où : $(x^2 - x).f'(x) + (x^2 - x + 2).f(x) = 0$, ce qui est bien l'équation (E).

II.5) Résoudre l'équation différentielle (E), et en déduire que : $f(x) = \frac{x^2.e^{-x}}{(x - 1)^2}$.

- *Corrigé* : $y' = \frac{-x^2 + x - 2}{x(x - 1)}.y = (-1 - \frac{2}{x(x - 1)}).y = (-1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1}).y = ... = (-1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x - 1}).y$.

Il en résulte que : $y = \frac{kx^2.e^{-x}}{(x - 1)^2}$, où $k \in \mathbb{R}$.

On trouve k en sachant que la formule de Taylor de $f(x)$ à l'ordre deux donne : $\frac{1}{2}.f''(0) = v_2 = 1$.

$\left(\frac{kx^2.e^{-x}}{(x - 1)^2}\right)'' = \frac{k(x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2).e^{-x}}{(x - 1)^4}$, d'où : $\frac{1}{2}.f''(0) = k = 1$. On a donc bien : $f(x) = \frac{x^2.e^{-x}}{(x - 1)^2}$.

II.6) Montrer que : $g(x) = \int_0^x \frac{f(t).dt}{t} = \frac{e^{-x}}{1 - x} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}).x^n$.

- *Corrigé* : Il est clair que $g(0) = 0$; g est donc la primitive qui s'annule en 0 de $\frac{f(x)}{x}$; c'est-à-dire :

$g(x) = \int_0^x \frac{f(t).dt}{t}$. Ainsi : $g(x) = \int_0^x \frac{t.e^{-t}}{(1 - t)^2}.dt = \int_0^x \frac{(-e^{-t})(1 - t) - (e^{-t})(-1)}{(1 - t)^2}.dt = \int_0^x \left(\frac{e^{-t}}{1 - t}\right)'.dt = \frac{e^{-x}}{1 - x} - 1$.

Au lieu de passer par la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$, *on pouvait faire une intégration par parties.*

Il faut ensuite trouver le développement en série de $\frac{e^{-x}}{1 - x}$:

$\frac{e^{-x}}{1 - x} = (1 + x + x^2 + ... + x^n + ...).\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x)^p}{p!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x)^{p+1}}{p!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x)^{p+2}}{p!} + ... + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x)^{p+n}}{p!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x)^{p+n+1}}{p!} + ... =$

$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x)^p}{p!} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-(-x)^p}{(p-1)!} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-x)^p}{(p-2)!} + ... + \sum_{p=n}^{\infty} \frac{(-1)^n(-x)^p}{(p-n)!} + \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-x)^p}{(p-n-1)!} + ...$

Le coefficient de x^n est obtenu en posant $p = n$ dans les $n + 1$ premiers termes, car les suivants ne contiennent pas de terme de degré n. Ainsi :

$\frac{e^{-x}}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}).x^n$, donc : $g(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}).x^n$.

II.7) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul : $v_n = n.\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, puis la limite de $\frac{n}{v_n}$.

- *Corrigé* : Il y a deux méthodes ; on peut dériver le résultat obtenu à la question précédente, ou montrer que la suite $w_n = n.\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ vérifie la même récurrence que v_n et a les mêmes deux premiers termes.

$f(x) = x.g'(x) = x.\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}).nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}).nx^n$, donc : $v_n = n.\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Alors : $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{n} = e^{-1}$, donc : $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{v_n} = e$.

III) *Généralisation d'une propriété utilisée à la question II.6* : Soit la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence R ; montrer que, pour tout réel x tel que $|x| < \inf\{R, 1\}$: $\frac{f(x)}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k).x^n$.

- *Corrigé* : $\frac{f(x)}{1 - x} = (1 + x + x^2 + ... + x^n + ...).\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p =$

$\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p + \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{p+1} + \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{p+2} + ... + \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{p+n} + \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{p+n+1} + ... =$

$\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p + \sum_{p=1}^{\infty} a_{p-1} x^p + \sum_{p=2}^{\infty} a_{p-2} x^p + ... + \sum_{p=n}^{\infty} a_{p-n} x^p + \sum_{p=n+1}^{\infty} a_{p-n-1} x^p + ...$

Le coefficient de x^n est obtenu en posant $p = n$ dans les $n + 1$ premiers termes, car les suivants ne contiennent pas de terme de degré n. Ainsi :

$$\frac{f(x)}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k).x^n.$$