TSI2 / DS2-2008-2009.

1) On note $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et soit une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Montrer que : $A^2 = \mathrm{Tr}(A).A - \det(A).I$. En déduire l'existence de deux suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout entier naturel n : $A^n = u_n.A + v_n.I$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $a \neq c$; montrer que, pour tout entier naturel n : $M^n = \begin{pmatrix} a^n & b.\dfrac{c^n - a^n}{c - a} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$.

3) On admet qu'une suite de matrices $\left(\begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ si et seulement si les quatre suites des coordonnées (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) convergent respectivement vers a, b, c, d. À quelle condition la suite $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la question précédente converge-t-elle vers une limite finie ?

4) On note $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$; étant donnée une série entière $\Sigma\alpha_n x^n$ de rayon de convergence R, à quelles conditions sur a et b la série $\Sigma\alpha_n.M_{a,b}^n$ converge-t-elle ?

5) *a*) Étant donnée une fonction f développable en série entière sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n.M_{a,b}^n$.

b) Appliquer ce résultat, pour $a \neq 0$, à : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.M_{a,b}^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.M_{a,b}^{2n+1}$; $S_{a,b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.M_{a,b}^n$.

6) *a*) Calculer $S_{0,b}$; vérifier que $S_{0,b}$ est bien égale à la limite quand a tend vers 0 de $S_{a,b}$.

b) Pour $a \neq 0$, exprimer $S_{-a,-b}$ en fonction de $S_{a,b}$.

7) Pour $a \neq 0$ et $a' \neq 0$, calculer c et d tels que $S_{a,b}.S_{a',b'} = S_{c,d}$. Montrer que $d = \frac{a + a'}{e^{a+a'} - 1}\left(\frac{b}{a}.(e^a - 1)e^{a'} + \frac{b'}{a'}.(e^{a'} - 1)\right)$.

8) *a*) Montrer que : $S_{a,b}S_{a',b'} = S_{a',b'}S_{a,b} \Leftrightarrow M_{a,b}M_{a',b'} = M_{a',b'}M_{a,b} \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.

b) Montrer que : $ab' - ba' = 0 \Rightarrow S_{a,b}S_{a',b'} = S_{a',b'}S_{a,b} = S_{a+a',b+b'}$.

9) E est désormais muni de sa structure euclidienne pour le produit scalaire canonique, la norme euclidienne et la base canonique orthonormale : $\left\|\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. En notant plus simplement $S_a = S_{a,a}$, montrer que : *a*) $\|S_a\| = \sqrt{2}.e^a.\sqrt{e^{2a} - e^a + 1}$.

b) $\|S_b - S_a\| = \sqrt{2}.|e^b - e^a|.\sqrt{(e^a + e^b)^2 - (e^a + e^b) + 1} \leq \sqrt{2}.|e^b - e^a|(e^a + e^b + 1)$.

10) *a*) Justifier le fait que : $\lim_{b\to a}\sqrt{2}.(e^b - e^a)(e^a + e^b + 1) = 0$, et en déduire que :

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ |b - a| < \eta \Rightarrow \sqrt{2}.|e^b - e^a|(e^a + e^b + 1) < \varepsilon$.

c) En déduire que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ |b - a| < \eta \Rightarrow \|S_b - S_a\| < \varepsilon$, puis que la fonction $\phi : \mathbb{R} \to E$, définie par : $\phi(a) = S_a$, est continue sur $\mathbb{R}$.

11) On étend les matrices de type S_a sur l'ensemble $\mathbb{C}$, en définissant $S_{a+ib} = \begin{pmatrix} e^{a+ib} & e^{2a+2ib} - e^{a+ib} \\ 0 & e^{2a+2ib} \end{pmatrix}$.

a) Donner les deux matrices réelles X et Y telles que $S_{a+ib} = X + i.Y$.

b) On étend aussi la norme à ces nouvelles matrices en posant : $\|S_{a+ib}\| = \sqrt{\|X\|^2 + \|Y\|^2}$; montrer que :

$$\|S_{a+ib}\| = \sqrt{2}.e^a.\sqrt{e^{2a} - e^a.\cos(b) + 1}.$$