

TSI2 / DS2-2008-2009 / corrigé.

1) On note $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et soit une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Montrer que : $A^2 = \text{Tr}(A).A - \det(A).I$. En déduire l'existence de deux suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout entier naturel n : $A^n = u_n.A + v_n.I$.

- *Corrigé* : La première égalité est immédiate. On a ainsi les initialisations d'une récurrence : $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$, $u_2 = \text{Tr}(A)$ et $v_2 = -\det(A)$.

On suppose donc que la propriété est vraie au rang n et on passe au rang $n + 1$:

$A^n = u_n.A + v_n.I \Rightarrow A^{n+1} = u_n.A^2 + v_n.A = u_n.(\text{Tr}(A).A - \det(A).I) + v_n.A = (\text{Tr}(A)u_n + v_n).A - \det(A)u_n.I$; d'où l'on déduit $u_{n+1} = \text{Tr}(A)u_n + v_n$ et $v_{n+1} = -\det(A)u_n$. Ces deux suites existent donc bien.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $a \neq c$; montrer que, pour tout entier naturel n : $M^n = \begin{pmatrix} a^n & b \cdot \frac{c^n - a^n}{c - a} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$.

- *Corrigé* : Pour $n = 0$, on obtient $I = I$. On suppose donc la propriété vraie au rang n et on passe au rang $n + 1$:

$M^{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^n & b \cdot \frac{c^n - a^n}{c - a} \\ 0 & c^n \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} a^{n+1} & b \cdot \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{c - a} \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$. La propriété est donc vraie.

3) On admet qu'une suite de matrices $\left(\begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ si et seulement si les quatre suites des coordonnées (a_n) , (b_n) , (c_n) , (d_n) convergent respectivement vers a , b , c , d . À quelle condition la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à la question précédente converge-t-elle vers une limite finie ?

- *Corrigé* : Pour que $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, il faut avoir $|a| < 1$ ou $a = 1$, et $|c| < 1$ ou $c = 1$. En outre, comme $a \neq c$, si l'une vaut 1 l'autre ne le peut pas. Si ces conditions sont remplies alors $(b \cdot \frac{c^n - a^n}{c - a})_{n \in \mathbb{N}}$, et donc aussi la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergent.

4) On note $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$; étant donnée une série entière $\sum \alpha_n x^n$ de rayon de convergence R , à quelles conditions sur a et b la série $\sum \alpha_n M_{a,b}^n$ converge-t-elle ?

- *Corrigé* : $M_{a,b}^n = \begin{pmatrix} a^n & b \cdot (2^n - 1)a^{n-1} \\ 0 & 2^n a^n \end{pmatrix}$; et alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_{a,b}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha_n a^n & b \alpha_n (2^n - 1)a^{n-1} \\ 0 & \alpha_n 2^n a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n & b \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (2^n - 1)a^{n-1} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n 2^n a^n \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que ces séries convergent toutes les trois quand $|a| < R/2$; il n'y a pas de condition sur b .

5) a) Étant donnée une fonction f développable en série entière sur \mathbb{R} , $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_{a,b}^n$.

b) Appliquer ce résultat, pour $a \neq 0$, à : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} M_{a,b}^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M_{a,b}^{2n+1}$; $S_{a,b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M_{a,b}^n$.

- *Corrigé* : a) Ici, comme $R = +\infty$, il n'y a pas de problème de convergence :

Si $a \neq 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_{a,b}^n = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n & \frac{b}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n (2a)^n - \alpha_n a^n) \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (2a)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) & b \cdot \frac{f(2a) - f(a)}{a} \\ 0 & f(2a) \end{pmatrix}$. Et si $a = 0$: $\alpha_0.I + \alpha_1.M_{0,b}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} M_{a,b}^n = \begin{pmatrix} \ln(1+a) & \frac{b}{a} \ln(2 - \frac{1}{1+a}) \\ 0 & \ln(1+2a) \end{pmatrix}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M_{a,b}^{2n+1} = \sin(a) \cdot \begin{pmatrix} 1 & (2 \cdot \cos(a) - 1) \cdot b/a \\ 0 & 2 \cdot \cos(a) \end{pmatrix}$; $S_{a,b} = e^a \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \cdot \frac{e^a - 1}{a} \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$.

6) a) Calculer $S_{0,b}$; vérifier que $S_{0,b}$ est bien égale à la limite quand a tend vers 0 de $S_{a,b}$.

b) Pour $a \neq 0$, exprimer $S_{-a,b}$ en fonction de $S_{a,b}$.

- *Corrigé* : a) Attention, il faut revenir à la définition et non pas faire la limite du résultat précédent. Comme $M_{0,b} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors toutes les puissances de $M_{0,b}$ sont nulles à partir de son carré. La somme ne contient alors que les deux premiers termes : $S_{0,b} = I + M_{0,b} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dont on constate qu'il s'agit bien de la limite de l'expression précédente.

$$b) S_{a,b} \cdot S_{-a,b} = \begin{pmatrix} e^a & b \cdot \frac{e^{2a} - e^a}{a} \\ 0 & e^{2a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-a} & -b \cdot \frac{e^{-2a} - e^{-a}}{-a} \\ 0 & e^{-2a} \end{pmatrix} = \dots = I, \text{ d'où : } S_{-a,b} = S_{a,b}^{-1}.$$

7) Pour $a \neq 0$ et $a' \neq 0$, calculer c et d tels que $S_{a,b} \cdot S_{a',b'} = S_{c,d}$. Montrer que $d = \frac{a+a'}{e^{a+a'} - 1} \left(\frac{b}{a} (e^a - 1)e^{a'} + \frac{b'}{a'} (e^{a'} - 1) \right)$.

$$- \text{Corrigé} : S_{a,b} \cdot S_{a',b'} = \begin{pmatrix} e^a & b \cdot \frac{e^{2a} - e^a}{a} \\ 0 & e^{2a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{a'} & b' \cdot \frac{e^{2a'} - e^{a'}}{a'} \\ 0 & e^{2a'} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} e^{a+a'} & \left(\frac{b}{a} (e^a - 1)e^{a'} + \frac{b'}{a'} (e^{a'} - 1) \right) e^{a+a'} \\ 0 & e^{2(a+a')} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^c & d \cdot \frac{e^{2c} - e^c}{c} \\ 0 & e^{2c} \end{pmatrix}$$

Il est évident que $c = a + a'$, et il reste à trouver d tel que : $\left(\frac{b}{a} (e^a - 1)e^{a'} + \frac{b'}{a'} (e^{a'} - 1) \right) e^{a+a'} = d \cdot \frac{e^{2(a+a')} - e^{a+a'}}{a+a'}$. D'où :

$$d = \frac{a+a'}{e^{a+a'} - 1} \left(\frac{b}{a} (e^a - 1)e^{a'} + \frac{b'}{a'} (e^{a'} - 1) \right).$$

8) a) Montrer que : $S_{a,b} S_{a',b'} = S_{a',b} S_{a,b} \Leftrightarrow M_{a,b} M_{a',b'} = M_{a',b} M_{a,b} \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.

b) Montrer que : $ab' - ba' = 0 \Rightarrow S_{a,b} S_{a',b'} = S_{a',b} S_{a,b} = S_{a+a',b+b'}$.

- *Corrigé* :

$$a) M_{a,b} M_{a',b'} = M_{a',b} M_{a,b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} aa' & ab' + 2ba' \\ 0 & 4aa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & a'b + 2b'a \\ 0 & 4aa' \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab' + 2ba' = a'b + 2b'a \Leftrightarrow ab' - ba' = 0.$$

• Si $a \neq 0$ et $a' \neq 0$:

$$S_{a,b} S_{a',b'} = S_{a',b} S_{a,b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} (e^a - 1)e^{a'} + \frac{b'}{a'} (e^{a'} - 1) = \frac{b'}{a'} (e^{a'} - 1)e^a + \frac{b}{a} (e^a - 1) \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'} \right) (e^a - 1)(e^{a'} - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} - \frac{b'}{a'} = 0$$

(compte tenu des hypothèses). Donc, si $a \neq 0$ et $a' \neq 0$: $S_{a,b} S_{a',b'} = S_{a',b} S_{a,b} \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.

• Si $a \neq 0$ et $a' = 0$:

$$S_{a,b} S_{0,b'} = S_{0,b} S_{a,b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^a & b \cdot \frac{e^{2a} - e^a}{a} \\ 0 & e^{2a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^a & b \cdot \frac{e^{2a} - e^a}{a} \\ 0 & e^{2a} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{b}{a} (e^a - 1) + b' = \frac{b}{a} (e^a - 1) + b' \cdot e^a$$

$$\Leftrightarrow b' = 0 \text{ (car } e^a \neq 1) \Leftrightarrow ab' - ba' = 0.$$

• C'est la même chose si $a = 0$ et $a' \neq 0$.

$$• \text{ Si } a = a' = 0 \text{ alors } ab' - ba' = 0 \text{ et } S_{0,b} S_{0,b'} = S_{0,b} S_{0,b} = \begin{pmatrix} 1 & b + b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) On remplace dans l'expression de d obtenue à la question 7) et on obtient rapidement $d = b + b'$.

9) E est désormais muni de sa structure euclidienne pour le produit scalaire canonique, la norme euclidienne et

la base canonique orthonormale : $\left\| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. En notant plus simplement $S_a = S_{a,a}$,

$$\text{montrer que : a) } \|S_a\| = \sqrt{2} \cdot e^a \cdot \sqrt{e^{2a} - e^a + 1}.$$

$$b) \|S_b - S_a\| = \sqrt{2} \cdot |e^b - e^a| \cdot \sqrt{(e^a + e^b)^2 - (e^a + e^b) + 1} \leq \sqrt{2} \cdot |e^b - e^a| (e^a + e^b + 1).$$

$$- \text{Corrigé} : a) \|S_a\| = \left\| e^a \cdot \begin{pmatrix} 1 & e^a - 1 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \right\| = \dots = \sqrt{2} \cdot e^a \cdot \sqrt{e^{2a} - e^a + 1}.$$

$$b) \|S_b - S_a\| = \dots = \left\| (e^b - e^a) \cdot \begin{pmatrix} 1 & e^a + e^b - 1 \\ 0 & e^a + e^b \end{pmatrix} \right\| = \dots = \sqrt{2} \cdot |e^b - e^a| \cdot \sqrt{(e^a + e^b)^2 - (e^a + e^b) + 1}.$$

Et comme : $(e^a + e^b)^2 - (e^a + e^b) + 1 \leq (e^a + e^b)^2 + 2 \cdot (e^a + e^b) + 1 = (e^a + e^b + 1)^2$, on a bien le résultat souhaité.

10) a) Justifier le fait que : $\lim_{b \rightarrow a} \sqrt{2} \cdot (e^b - e^a)(e^a + e^b + 1) = 0$, et en déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |b - a| < \eta \Rightarrow \sqrt{2} \cdot |e^b - e^a|(e^a + e^b + 1) < \varepsilon.$$

c) En déduire que : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |b - a| < \eta \Rightarrow \|S_b - S_a\| < \varepsilon$, puis que la fonction $\phi: \mathbb{R} \rightarrow E$, définie par : $\phi(a) = S_a$, est continue sur \mathbb{R} .

- *Corrigé : a)* La fonction qui à tout réel x associe $f(x) = \sqrt{2} \cdot (e^x - e^a)(e^a + e^x + 1)$ est continue en a , donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \text{ d'où, en nommant la variable } b \text{ au lieu de } x :$$

$$\lim_{b \rightarrow a} f(b) = \lim_{b \rightarrow a} \sqrt{2} \cdot (e^b - e^a)(e^a + e^b + 1) = f(a) = 0.$$

b) Il s'agit de la définition de la limite.

c) Grâce à la question 9) : $\|S_b - S_a\| \leq \sqrt{2} \cdot |e^b - e^a|(e^a + e^b + 1) < \varepsilon$; on peut donc écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |b - a| < \eta \Rightarrow \|S_b - S_a\| < \varepsilon, \text{ ce qui est la définition de la limite : } \lim_{b \rightarrow a} \|\phi(b) - \phi(a)\| = 0, \text{ ou}$$

encore : $\lim_{b \rightarrow a} \phi(b) = \phi(a)$, en nommant la variable x au lieu de b : $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \phi(a)$, ce qui prouve la continuité de ϕ en a . Comme a est un réel quelconque, il s'en suit que ϕ est continue sur \mathbb{R} .

- *Remarque :* On pourrait aussi, en le démontrant préalablement, utiliser la définition de la limite donnée à la question 3).

11) On étend les matrices de type S_a sur l'ensemble \mathbb{C} , en définissant $S_{a+ib} = \begin{pmatrix} e^{a+ib} & e^{2a+2ib} - e^{a+ib} \\ 0 & e^{2a+2ib} \end{pmatrix}$.

a) Donner les deux matrices réelles X et Y telles que $S_{a+ib} = X + i \cdot Y$.

b) On étend aussi la norme à ces nouvelles matrices en posant : $\|S_{a+ib}\| = \sqrt{\|X\|^2 + \|Y\|^2}$; montrer que :

$$\|S_{a+ib}\| = \sqrt{2} \cdot e^a \cdot \sqrt{e^{2a} - e^a \cdot \cos(b) + 1}.$$

$$\text{- Corrigé : a) } S_{a+ib} = \begin{pmatrix} e^a \cdot (\cos(b) + i \cdot \sin(b)) & e^{2a} \cdot (\cos(2b) + i \cdot \sin(2b)) - e^a \cdot (\cos(b) + i \cdot \sin(b)) \\ 0 & e^{2a} \cdot (\cos(2b) + i \cdot \sin(2b)) \end{pmatrix} =$$

$$S_{a+ib} = X + i \cdot Y = \begin{pmatrix} e^a \cdot \cos(b) & e^{2a} \cdot \cos(2b) - e^a \cdot \cos(b) \\ 0 & e^{2a} \cdot \cos(2b) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} e^a \cdot \sin(b) & e^{2a} \cdot \sin(2b) - e^a \cdot \sin(b) \\ 0 & e^{2a} \cdot \sin(2b) \end{pmatrix}.$$

$$b) \|S_{a+ib}\| = \sqrt{e^{2a} \cdot \cos^2(b) + (e^{2a} \cdot \cos(2b) - e^a \cdot \cos(b))^2 + e^{4a} \cdot \cos^2(2b) + e^{2a} \cdot \sin^2(b) + (e^{2a} \cdot \sin(2b) - e^a \cdot \sin(b))^2 + e^{4a} \cdot \sin^2(2b)} =$$

$$\|S_{a+ib}\| = \dots = \sqrt{2} \cdot e^a \cdot \sqrt{e^{2a} - e^a \cdot \cos(b) + 1}.$$

- *Remarque :* Il existe une formule (formule de Baker-Campbell-Hausdorff) reliant les crochets de Lie de l'énoncé du DM2 aux matrices du DS2 (appelées exponentielles de matrices), dans le cas où le produit n'est pas commutatif (cf. question 8a) du DS2).

En notant $\phi(A, B)$ du DM2 = $[A, B] = AB - BA$, $A = M_{a,b}$, $B = M_{a',b'}$, $\exp(A) = S_{a,b}$ et $\exp(B) = S_{a',b'}$:

$$\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2} \cdot [A, B] + \frac{1}{12} \cdot ([A, [A, B]] + [B, [B, A]]) + \frac{1}{24} \cdot [A, [B, [A, B]]]\right) +$$

$$- \frac{1}{720} \cdot ([[[[A, B], B], B], B] + [[[[B, A], A], A], A]) + \frac{1}{360} \cdot ([[[[A, B], B], B], A] + [[[[B, A], A], A], B])$$

$$+ \frac{1}{120} \cdot ([[[[B, A], B], A], B] + [[[[A, B], A], B], A]) + \dots.$$

Si $AB = BA$, on retrouve bien : $\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(A + B)$; si A et B commutent avec $[A, B]$ (c'est-à-dire : $A^2B - 2 \cdot ABA + BA^2 = AB^2 - 2 \cdot BAB + B^2A = 0$), alors : $\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(A + B + (AB - BA)/2)$.