TSI2 / DS2-2009-2010 / corrigé.

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients complexes et triangulaires supérieures.

On considère dans la suite les matrices de E : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner sa dimension.

- *Corrigé* : $I \in E$, donc $E \neq \varnothing$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $(A, B) \in E^2$; $\alpha.A + \beta.B$ est triangulaire supérieure, donc c'est un élément de E. Ainsi, E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En comptant le nombre d'éléments significatifs par colonne, la dimension est $1 + 2 + ... + n = n(n + 1)/2$.

2) Étant donnés le couple d'entiers naturels $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$, $p + q \leq n + 1$, soit $\phi_{p,q}: E^2 \to \mathbb{C}^{n-p-q+2}$, définie par :

$$\phi_{p,q}(A, B) = \begin{pmatrix} a_{1,p}b_{p,p+q-1} \\ a_{2,p+1}b_{p+1,p+q} \\ \vdots \\ a_{n-p-q+1,n-q}b_{n-q,n-1} \\ a_{n-p-q+2,n-q+1}b_{n-q+1,n} \end{pmatrix} = (a_{k,p+k-1}b_{p+k-1,p+q+k-2})_{1 \leq k \leq n-p-q+2}.$$

a) Montrer que $\phi_{p,q}$ est bilinéaire.

b) Montrer que $\phi_{1,1}$ est symétrique mais que tous les autres $\phi_{p,q}$ ne sont ni symétriques ni antisymétriques.

c) Pour $n = 5$, donner $\phi_{2,3}(A, B)$ et $\phi_{3,2}(A, B)$.

- *Corrigé* : *a*) La bilinéarité est très simple à établir.

b) Pour que $\phi_{p,q}$ soit symétrique ou antisymétrique, il est nécessaire de pouvoir échanger les coefficients de A avec ceux de B ; il convient donc que les indices soient les mêmes : $k = p + k - 1$ et $p + k - 1 = p + q + k - 2$, d'où l'on déduit $p = q = 1$. En conséquence de quoi, si $(p, q) \neq (1, 1)$ alors $\phi_{p,q}$ n'est ni symétrique ni antisymétrique.

Il reste à étudier $\phi_{1,1}$: $\phi_{1,1}(A, B) = (a_{k,k}b_{k,k})_{1 \leq k \leq n}$, qui est symétrique de façon évidente.

c) Pour $n = 5$: $\phi_{2,3}(A, B) = \begin{pmatrix} a_{1,2}b_{2,4} \\ a_{2,3}b_{3,5} \end{pmatrix}$ et $\phi_{3,2}(A, B) = \begin{pmatrix} a_{1,3}b_{3,4} \\ a_{2,4}b_{4,5} \end{pmatrix}$.

3) Pour $m \in [\![1, n]\!]$, on note d_m l'application de E dans $\mathbb{C}^{n-m+1}$ définie par les coefficients de la m-ième diagonale de A : $d_m(A) = \begin{pmatrix} a_{1,m} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{n-m,n-1} \\ a_{n-m+1,n} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que c'est une application linéaire.

b) On note $AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$; montrer que : $d_m(AB) = (c_{k,m+k-1})_{1 \leq k \leq n-m+1}$, avec : $c_{k,m+k-1} = \sum_{i=k}^{m+k-1} a_{k,i}b_{i,m+k-1}$.

c) Montrer que : $d_m(AB) = \sum_{p+q=m+1} \phi_{p,q}(A, B)$.

- *Corrigé* : *a*) La linéarité est immédiate.

b) C'est une conséquence directe de la définition, avec : $c_{k,m+k-1} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}b_{i,m+k-1}$ selon la définition du produit, mais si $i < k$: $a_{k,i} = 0$, et si $i > m + k - 1$: $b_{i,m+k-1} = 0$. Il s'en suit que : $c_{k,m+k-1} = \sum_{i=k}^{m+k-1} a_{k,i}b_{i,m+k-1}$.

c) Si $p + q = m + 1$: $\phi_{p,q}(A, B) = (a_{k,p+k-1}b_{p+k-1,p+q+k-2})_{1\le k\le n-p-q+2} = (a_{k,p+k-1}b_{p+k-1,m+k-1})_{1\le k\le n-m+1}$. Donc :

$$\sum_{p+q=m+1} \phi_{p,q}(A, B) = \Big(\sum_{p=1}^{n-k+1} a_{k,p+k-1}b_{p+k-1,m+k-1}\Big)_{1\le k\le n-m+1},$$

mais si $p > m$, alors $p + k - 1 > m + k - 1$, donc : $b_{p+k-1,m+k-1} = 0$. D'où :

$$\sum_{p+q=m+1} \phi_{p,q}(A, B) = \Big(\sum_{p=1}^{m} a_{k,p+k-1}b_{p+k-1,m+k-1}\Big)_{1\le k\le n-m+1} = \Big(\sum_{i=k}^{m+k-1} a_{k,i}b_{i,m+k-1}\Big)_{1\le k\le n-m+1} = (c_{k,m+k-1})_{1\le k\le n-m+1} = d_m(AB),$$

en posant $i = p + k - 1$.

4) *a*) On définit l'application χ telle que $\chi(A, B) = (d_1(AB), d_2(AB), ..., d_n(AB))$. Donner l'ensemble d'arrivée F de χ, et montrer que χ est une application bilinéaire.

b) Soit $\psi: F \to E$, tel qu'étant donné $U = (C_1, C_2, ..., C_n) \in F$: $\psi(U) = v$, avec pour tout $m \in [\![1, n]\!]$: $d_m(v) = C_m$. Montrer que ψ est un isomorphisme.

c) Montrer que $\psi\circ\chi(A, B) = AB$.

\- *Corrigé* : *a*) $F = \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^{n-1}\times...\times\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}$. La bilinéarité est immédiate et utilise la linéarité des d_m.

b) Comme $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer l'injectivité donc, de prouver que son noyau est réduit au vecteur nul : $\psi(U) = 0_E$, et comme $d_m(0_E)$ est nul pour tout m, il s'en suit que tous les C_m sont nuls ce dont on déduit : $U = 0_F$. On est donc bien en présence d'un isomorphisme.

c) $\psi\circ\chi(A, B) = \psi((d_1(AB), d_2(AB), ..., d_n(AB))) = v$ tel que pour tout $m \in [\![1, n]\!]$: $d_m(v) = C_m = d_m(AB)$. Il en résulte que $v = AB$ car ψ est bijective.

5) On note $K_0 = E$, et $K_m = \mathrm{Ker}(d_1)\cap\mathrm{Ker}(d_2)\cap...\cap\mathrm{Ker}(d_m)$ pour $m \ge 1$. Soit r l'application de E dans $\mathbb{N}$ qui à A associe $r(A)$ tel que $A \in K_{r(A)}$ et $A \notin K_{r(A)+1}$.

a) Montrer que si $r(A) \ge 1$ alors A est triangulaire stricte.

b) On note $\vec{0}_m$ le vecteur nul de $\mathbb{C}^m$; montrer que si $A \in \mathrm{Ker}(d_p)$ alors $\phi_{p,q}(A, B) = \vec{0}_{n-p-q+2}$.

c) Montrer que si $B \in \mathrm{Ker}(d_q)$ alors $\phi_{p,q}(A, B) = \vec{0}_{n-p-q+2}$.

\- *Corrigé* : *a*) Si $r(A) \ge 1$, ça signifie que $A \in \mathrm{Ker}(d_1)$, donc $\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1} \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$ est nul, c'est-à-dire que tous les coefficients diagonaux de A sont nuls, ce qui en fait une matrice triangulaire stricte.

b) Si $A \in \mathrm{Ker}(d_p)$, alors $\begin{pmatrix} a_{1,p} \\ a_{2,p+1} \\ \vdots \\ a_{n-p,n-1} \\ a_{n-p+1,n} \end{pmatrix}$ est nulle, et donc : $\phi_{p,q}(A, B) = \begin{pmatrix} a_{1,p}b_{p,p+q-1} \\ a_{2,p+1}b_{p+1,p+q} \\ \vdots \\ a_{n-p-q+1,n-q}b_{n-q,n-1} \\ a_{n-p-q+2,n-q+1}b_{n-q+1,n} \end{pmatrix} = \vec{0}_{n-p-q+2}$.

c) Si $B \in \mathrm{Ker}(d_q)$, alors $\begin{pmatrix} b_{1,q} \\ b_{2,q+1} \\ \vdots \\ b_{n-q,n-1} \\ b_{n-q+1,n} \end{pmatrix}$ est nulle, et donc : $\phi_{p,q}(A, B) = \begin{pmatrix} a_{1,p}b_{p,p+q-1} \\ a_{2,p+1}b_{p+1,p+q} \\ \vdots \\ a_{n-p-q+1,n-q}b_{n-q,n-1} \\ a_{n-p-q+2,n-q+1}b_{n-q+1,n} \end{pmatrix} = \vec{0}_{n-p-q+2}$.

6) *a*) Montrer que si $p \le r(A)$ alors $\phi_{p,q}(A, B) = \vec{0}_{n-p-q+2}$, et : $d_p(A) = (a_{k,p+k-1})_{1\le k\le n-p+1} = \vec{0}_{n-p+1}$.

b) Montrer que si $q \le r(B)$ alors $\phi_{p,q}(A, B) = \vec{0}_{n-p-q+2}$, et : $d_q(A) = (b_{k,q+k-1})_{1 \le k \le n-q+1} = \vec{0}_{n-q+1}$.

- *Corrigé* : *a*) si $p \le r(A)$ alors $A \in Ker(d_p)$.

Si $p \le r(A)$, alors $K_{r(A)} \subset Ker(d_p)$, donc, comme $A \in K_{r(A)}$, alors $A \in Ker(d_p)$, , donc : $\phi_{p,q}(A, B) = \vec{0}_{n-p-q+2}$; en outre, selon la définition et la question 3*b*) : $d_p(A) = (a_{k,p+k-1})_{1 \le k \le n-p+1} = \vec{0}_{n-p+1}$.

b) De même, si $q \le r(B)$ alors $B \in Ker(d_q)$, donc : $\phi_{p,q}(A, B) = \vec{0}_{n-p-q+2}$, et on peut appliquer le résultat de la question précédente : $d_q(A) = (b_{k,q+k-1})_{1 \le k \le n-q+1} = \vec{0}_{n-q+1}$.

7) *a*) Soit $\rho = r(A) + r(B)$, $1 \le m \le \rho$ et $p + q = m + 1$; montrer que, dans ce cas : Soit $p \le r(A)$, soit $q \le r(B)$.

b) En déduire que pour tout m tel que $1 \le m \le \rho$: $d_m(AB) = \vec{0}_{n-m+1}$.

c) En déduire que, si $\rho \ge n$: $\chi(A, B) = 0_F$ et $AB = 0_E$, et si $\rho \le n$ alors : $r(AB) \ge \rho$.

- *Corrigé* : *a*) soit p et q tels que $p + q \le m + 1 \le \rho + 1 = r(A) + r(B) + 1$. Soit $p \le r(A)$, soit $p > r(A)$. Dans ce dernier cas : $-p < - r(A)$, donc : $q \le r(A) + r(B) + 1 - p < r(B) + 1$, d'où finalement : $q \le r(B)$.

b) Il s'en suit que, si $p + q = m + 1$ avec $m \le \rho$, les lignes de $\phi_{p,q}(A, B)$ sont nulles donc : $\phi_{p,q}(A, B) = \vec{0}_{n-m+1}$. Quand on somme tous les $\phi_{p,q}(A, B)$, d'après la question 3*c*), on obtient au bout du compte : $d_m(AB) = \vec{0}_{n-m+1}$.

c) Si $\rho \ge n$, alors pour tout m tel que $1 \le m \le n$: $d_m(AB) = \vec{0}_{n-m+1}$; les colonnes de $\chi(A, B)$ sont nulles ainsi que les diagonales de AB. Finalement : $\chi(A, B) = 0_F$ et $AB = 0_E$.

Si $\rho \le n$ alors : pour tout m tel que $1 \le m \le \rho$: $d_m(AB) = 0$, donc : $AB \in Ker(d_m)$, et finalement :

$$AB \in Ker(d_1) \cap Ker(d_2) \cap ... \cap Ker(d_\rho) = K_\rho.$$

Comme par ailleurs, comme $AB \in K_{r(AB)}$ et $AB \notin K_{r(AB)+1}$, il s'en suit que : $\rho \le r(AB)$.

8) *a*) Soit $A_1, A_2, ..., A_m$ des matrices de E ; montrer que, si $r(A_1) + r(A_2) + ... + r(A_m) \ge n$, alors :

$$A_1A_2...A_m = 0_E \text{ (récurrence sur } m).$$

b) Étant donné un entier naturel non nul x, montrer que le plus petit entier q tel $qx \ge n$ est $q = E\left(\frac{n - 1}{x}\right) + 1$.

En déduire que si $r(A) \ge 1$, alors $A \in E$ est nilpotente d'ordre $p \le E\left(\frac{n - 1}{r(A)}\right) + 1$. (E() désigne la partie entière).

c) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $a_{23} \ne 0$; montrer que $r(M) = 1$ et $M^3 = 0_E$; en déduire qu'on n'a pas en général l'égalité entre l'ordre de nilpotence p et $q = E\left(\frac{n - 1}{r(M)}\right) + 1$.

- *Corrigé* : *a*) C'est immédiat pour $m = 1$ ou 2. On suppose la propriété vraie au rang m, et on essaie de la prouver au rang $m + 1$. Si $r(A_1) + r(A_2) + ... + r(A_m) + r(A_{m+1}) \ge n$, alors, en notant $A'_m = A_mA_{m+1}$, comme : $r(A_m) + r(A_{m+1}) \le r(A'_m)$, ainsi : $r(A_1) + r(A_2) + ... + r(A'_m) \ge n$; d'où, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$A_1A_2...A'_m = A_1A_2...A_mA_{m+1} = 0_E.$$

b) $q = E\left(\frac{n - 1}{x}\right) + 1$ est le plus petit entier tel que $\frac{n - 1}{x} < q$, donc : $n - 1 < qx$, d'où : $n \le qx$.

On en déduit que pour $x = r(A)$, $q = E\left(\frac{n - 1}{r(A)}\right) + 1$ est le plus petit entier tel que $q.r(A) \ge n$, donc : $A^q = 0_E$. Il s'en suit que A est nilpotente d'ordre $p \le q$, d'où : $p \le E\left(\frac{n - 1}{r(A)}\right) + 1$. En remarquant au passage qu'il est nécessaire d'avoir $r(A) \ge 1$, d'une part pour pouvoir diviser par $r(A)$, d'autre part pour que A soit triangulaire stricte.

- *Remarque* : On pourrait aussi dire que, si A est nilpotente d'ordre p, alors, sachant qu'on a de toute façon $A^q = 0_E$ car une matrice nilpotente a nécessairement $r(A) \geq 1$ sinon le coefficient non nul de la première diagonale ne pourrait jamais disparaître, alors $p \leq q$, donc : $r(A) \leq E((n - 1)/(p - 1))$.

c) Il est clair que $r(M) = 1$ car seule la première diagonale est nulle. Le calcul de M^3 donne bien 0_E, tandis que $M^2 \neq 0_E$; M est donc nilpotente d'ordre $p = 3$. Par contre : $q = E\left(\frac{n-1}{r(M)}\right) + 1 = n = 5$, donc : $p < q$. Il n'y a ainsi pas égalité dans le cas général.

9) Soit $A \in E$ nilpotente d'ordre $n \geq 2$.

a) Montrer que : $r(A) = 1$.

b) Montrer par récurrence sur m que, pour tout $m \in [\![1, n]\!]$: $r(A^m) \geq m$.

c) Montrer que, pour tout $m \in [\![1, n]\!]$: $r(A^m) = m$.

- *Corrigé* : *a*) Si $r(A) = 0$ alors il y a au moins un terme non nul dans la diagonale principale (la première). En élevant A aux différentes puissances successives, ce terme ne s'élimine pas et A ne pourrait pas être nilpotente. Si $r(A) \geq 2$, alors : $q = E\left(\frac{n-1}{r(A)}\right) + 1 \leq \frac{n+1}{2}$, donc : $q \leq E\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Or, pour $n \geq 2$: $E\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq n - 1$. Et comme l'ordre de nilpotence p est inférieur à q, il s'en suit qu'on ne peut pas avoir $r(A) \geq 2$. Il ne reste plus qu'une unique possibilité, à savoir : $r(A) = 1$.

b) On fait ensuite une récurrence sur m :

- C'est vrai pour $m = 1$, et on suppose que c'est vrai jusqu'au rang $m \leq n - 1$ (on sait aussi que c'est vrai au rang n). Au rang $m + 1$ on a, d'après la question 7*c*) : $r(M^{m+1}) = r(M.M^m) \geq r(M) + r(M^m) \geq 1 + m$. Ce qui prouve la proposition.

c) Il faut montrer l'inégalité dans l'autre sens : Supposons que $r(M^m) \geq m + 1$, alors :

$n = r(M^n) = r(M^m.M^{n-m}) \geq r(M^m) + r(M^{n-m}) \geq m + 1 + n - m = n + 1$ ($r(M^{n-m}) \geq m - n$ d'après le *a*)).

C'est évidemment impossible, d'où l'on déduit $r(M^m) = m$.