TSI2 / DS2-2009-2010.

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre n non nul, à coefficients complexes et triangulaires supérieures.

On considère dans la suite les matrices de E :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner sa dimension.

2) Étant donnés le couple d'entiers naturels $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$, $p + q \leq n + 1$, soit $\phi_{p,q} : E^2 \to \mathbb{C}^{n-p-q+2}$, définie par :

$$\phi_{p,q}(A, B) = \begin{pmatrix} a_{1,p}b_{p,p+q-1} \\ a_{2,p+1}b_{p+1,p+q} \\ \vdots \\ a_{n-p-q+1,n-q}b_{n-q,n-1} \\ a_{n-p-q+2,n-q+1}b_{n-q+1,n} \end{pmatrix} = (a_{k,p+k-1}b_{p+k-1,p+q+k-2})_{1 \leq k \leq n-p-q+2}.$$

a) Montrer que $\phi_{p,q}$ est bilinéaire.

b) Montrer que $\phi_{1,1}$ est symétrique mais que tous les autres $\phi_{p,q}$ ne sont ni symétriques ni antisymétriques.

c) Pour $n = 5$, donner $\phi_{2,3}(A, B)$ et $\phi_{3,2}(A, B)$.

3) Pour $m \in [\![1, n]\!]$, on note d_m l'application de E dans $\mathbb{C}^{n-m+1}$ définie par les coefficients de la m-ième diagonale de A : $d_m(A) = \begin{pmatrix} a_{1,m} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{n-m,n-1} \\ a_{n-m+1,n} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que c'est une application linéaire.

b) On note $AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$; montrer que : $d_m(AB) = (c_{k,m+k-1})_{1 \leq k \leq n-m+1}$, avec :

$$c_{k,m+k-1} = \sum_{i=k}^{m+k-1} a_{k,i}b_{i,m+k-1}.$$

c) Montrer que : $d_m(AB) = \sum_{p+q=m+1} \phi_{p,q}(A, B)$.

4) *a*) On définit l'application χ telle que $\chi(A, B) = (d_1(AB), d_2(AB), \dots, d_n(AB))$. Donner l'ensemble d'arrivée F de χ, et montrer que χ est une application bilinéaire.

b) Soit $\psi : F \to E$, tel qu'étant donné $U = (C_1, C_2, \dots, C_n) \in F$: $\psi(U) = v$, avec pour tout

$k \in [\![1, n]\!]$: $d_k(v) = C_k$. Montrer que ψ est un isomorphisme.

c) Montrer que $\psi \circ \chi(A, B) = AB$.

5) On note $K_0 = E$, et $K_m = \mathrm{Ker}(d_1) \cap \mathrm{Ker}(d_2) \cap ... \cap \mathrm{Ker}(d_m)$ pour $m \geq 1$. Soit r l'application de E dans $\mathbb{N}$ qui à A associe $r(A)$ tel que $A \in K_{r(A)}$ et $A \notin K_{r(A)+1}$.

a) Montrer que si $r(A) \geq 1$ alors A est triangulaire stricte.

b) On note $\vec{0}_m$ le vecteur nul de $\mathbb{C}^m$; montrer que si $A \in \mathrm{Ker}(d_p)$ alors $\phi_{p,q}(A, B) = \vec{0}_{n-p-q+2}$.

c) Montrer que si $B \in \mathrm{Ker}(d_q)$ alors $\phi_{p,q}(A, B) = \vec{0}_{n-p-q+2}$.

6) *a*) Montrer que si $p \leq r(A)$ alors $\phi_{p,q}(A, B) = \vec{0}_{n-p-q+2}$, et $d_p(A) = (a_{k,p+k-1})_{1 \leq k \leq n-p+1} = \vec{0}_{n-p+1}$.

b) Montrer que si $q \leq r(B)$ alors $\phi_{p,q}(A, B) = \vec{0}_{n-p-q+2}$, et : $d_q(A) = (b_{k,q+k-1})_{1 \leq k \leq n-q+1} = \vec{0}_{n-q+1}$.

7) *a*) Soit $\rho = r(A) + r(B)$, $1 \leq m \leq \rho$ et $p + q = m + 1$; montrer que, dans ce cas : Soit $p \leq r(A)$, soit $q \leq r(B)$.

b) En déduire que pour tout m tel que $1 \leq m \leq \rho$: $d_m(AB) = \vec{0}_{n-m+1}$.

c) En déduire que, si $\rho \geq n$: $\chi(A, B) = 0_F$ et $AB = 0_E$, et si $\rho \leq n$ alors : $r(AB) \geq \rho$.

8) *a*) Soit $A_1, A_2, ..., A_m$ des matrices de E ; montrer que, si $r(A_1) + r(A_2) + ... + r(A_m) \geq n$, alors : $A_1A_2...A_m = 0_E$ (récurrence sur m).

b) Étant donné un entier naturel non nul x, montrer que le plus petit entier q tel $qx \geq n$ est $q = E\left(\frac{n-1}{x}\right) + 1$. En déduire que si $r(A) \geq 1$, alors $A \in E$ est nilpotente d'ordre p, où $p \leq E\left(\frac{n-1}{r(A)}\right) + 1$. ($E()$ désigne la partie entière).

c) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $a_{23} \neq 0$; montrer que $r(M) = 1$ et $M^3 = 0_E$; en déduire qu'on n'a pas en général l'égalité entre l'ordre de nilpotence p et $q = E\left(\frac{n-1}{r(M)}\right) + 1$.

9) Soit $A \in E$ nilpotente d'ordre $n \geq 2$.

a) Montrer que : $r(A) = 1$.

b) Montrer par récurrence sur m que, pour tout $m \in [\![1, n]\!]$: $r(A^m) \geq m$.

c) Montrer que, pour tout $m \in [\![1, n]\!]$: $r(A^m) = m$.

- *Remarque* : Ça signifie que, quand on calcule les puissances d'une matrice triangulaire stricte A, où la seconde diagonale n'est pas nulle, et sauf cas particulier comme à la question 8*c*), alors la diagonale non nulle est repoussée d'un rang à chaque produit par A.