

TSI2 / DS3-2008-2009.

Math 1 - Centrale Supélec 2006 (m06ct1e).

D $H \in]0, 2]$ est un réel fixé ; $I =]-1/2, 1/2[$, $I^* =]-1/2, 0[\cup]0, 1/2[$. Pour tout $t \in I^*$, on pose :

$N(t) = E(-\ln(|t|)/\ln(2))$, où $E(x)$ est la partie entière de x .

I.A.1) Rappeler, sans démonstration, ce que sont :

a) L'ensemble J des réels r pour lesquels la série de terme général r^n converge.

b) La valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ pour $r \in J$, et celle de $\sum_{n=k}^{\infty} r^n$ pour $r \in J$ et $k \in \mathbb{N}$.

c) La valeur de $\sum_{n=0}^p r^n$ pour $r \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$.

I.A.2) Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $2^{-nH} \cdot \cos(2^n x)$ est absolument convergente. On pose ainsi :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nH} \cdot \cos(2^n x) ; \text{ et pour } k \in \mathbb{N}^* : S_k(x) = \sum_{n=0}^{k-1} 2^{-nH} \cdot \cos(2^n x), T_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-nH} \cdot \cos(2^n x).$$

I.A.3) Montrer que f est de période 2π . Déterminer un majorant $M_1(H)$ de la fonction $|f|$.

I.A.4) Montrer que, pour tout $t \in I^*$, on a : $N(t) \geq 1$, et : $2^{-N(t)-1} \leq |t| \leq 2^{-N(t)} \leq 2|t|$.

I.A.5) Soit a et h deux réels. On pose $z = e^{ia}(e^{ih} - 1 - ih)$; ($i^2 = -1$).

a) Montrer que $|z| \leq h^2 e^{|h|}$ (on pourra utiliser l'expression de e^{ih} comme somme d'une série entière).

b) En considérant la partie réelle de z , montrer que : $|\cos(a+h) - \cos(a) + h \cdot \sin(a)| \leq h^2 e^{|h|}$.

I.A.6) a) Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in I^*$, on a : $|S_{N(t)}(x+t) - S_{N(t)}(x) + t \cdot \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \cdot \sin(2^n x)| \leq et^2 \cdot \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)}$.
(On pourra utiliser la question précédente et l'inégalité $e^{2^n |t|} \leq e$, que l'on justifiera).

b) Lorsque $H < 2$, trouver une constante $C_1(H)$ telle que, pour tout $t \in I^*$, on ait : $et^2 \cdot \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} \leq C_1(H) \cdot |t|^H$.

c) Lorsque $H = 2$, trouver une constante K telle que, pour tout $t \in I^*$, on ait : $et^2 \cdot \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} \leq Kt^2 \cdot \ln(1/|t|)$.

I.A.7) Montrer qu'il existe une constante $C_2(H)$ telle que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $t \in I^*$:

$$|T_{N(t)}(x+t) - T_{N(t)}(x)| \leq C_2(H) |t|^H \quad (\text{on pourra utiliser l'inégalité, vraie sur } \mathbb{R}^2 : |\cos(a) - \cos(b)| \leq 2).$$

I.B) On considère désormais la fonction : $g(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-H)} \cdot \sin(2^n x)$, et on prend $H \in]1, 2]$.

I.B.1) Montrer que g est définie sur \mathbb{R} . Déterminer un majorant $M_2(H)$ de la fonction $|g|$.

I.B.2) Pour x fixé dans \mathbb{R} et $t \in I^*$, on pose : $\ell(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} + \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \cdot \sin(2^n x)$.

Montrer que $\ell(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 (on pourra utiliser I.A.6 et I.A.7).

I.B.3) En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R} , et que $f' = g$. Par la suite, on admet que g est continue sur \mathbb{R} .

I.B.4) a) Calculer les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de la série de Fourier de la fonction f . On admettra que :

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-pH} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(2^p x) \cos(nx) dx.$$

b) Pour un réel x fixé, écrire la somme de Fourier de f de rang 2^n , et montrer qu'elle coïncide avec une somme partielle de la série numérique qui définit $f(x)$.

c) Les propriétés de f permettent-elles de prévoir que $f(x)$ est la limite, quand n tend vers l'infini, des sommes de Fourier de f de rang 2^n ?

I.B.5) a) Utiliser I.B.4) pour calculer $\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt$ en fonction de H .

b) Montrer que : $\int_0^{2\pi} |f(t)| dt \geq \pi/(1 + 2^{-H})$.

I.C) On prend $H = 2$; I.C.1) Trouver la valeur exacte de $f(x)$ et de $g(x)$ pour $x = \pi/4$, puis $3\pi/4$.

I.C.2) On pose : $\phi(x) = \sin(x) + \sin(2x)/2 + \sin(4x)/4 + \sin(8x)/8$.

a) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur minimale de $\phi(x)$ pour $x \in [\pi/4, 3\pi/4]$.

b) En revenant à la définition de g , donner une majoration de $|g(x) + \phi(x)|$.

c) En déduire que g est strictement négative sur $[\pi/4, 3\pi/4]$.

I.C.3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[\pi/4, 3\pi/4]$.

I.D) On prend $H \in]0, 1[$. On veut montrer que f n'est pas dérivable en 0. Soit $t \in]0, 1/2[$.

I.D.1) Vérifier que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a : $1 - \cos(x) \geq x^2/4$.

I.D.2) Montrer qu'il existe une constante $C_3(H) > 0$ telle que : $|S_{N(t)}(0) - S_{N(t)}(t)| \geq C_3(H)(t^H - t^2 \cdot 2^{2-H})$.

I.D.3) Vérifier que : $T_{N(t)}(0) - T_{N(t)}(t) \geq 0$.

I.D.4) En déduire que : $\frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0, $t > 0$.

II II.A) Soit Q un polynôme du second degré en x, y , défini par : $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + a'x + b'y + c'$, à coefficients réels tels que $b^2 - 4ac \neq 0$. On définit une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par : $f(x, y) = e^{Q(x, y)}$.

II.A.1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f . Montrer qu'elles s'annulent aux mêmes points que celles de Q .

II.A.2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f . Comparer ces dérivées aux dérivées partielles d'ordre 2 de Q en un point où les dérivées partielles d'ordre 1 de Q sont nulles.

II.A.3) Utiliser le développement de Taylor-Young pour montrer que les extremums locaux de f sont situés aux mêmes points et sont de même nature que ceux de Q .

II.B) Soit Q_1 et Q_2 deux polynômes du second degré en x, y , définis par :

$$Q_1(x, y) = x^2/2 - y^2 + 2xy/3 - 5x/3 + 11y/3 - 7/2, \quad Q_2(x, y) = x^2 + y^2/10 - 19x/10 + y/10 + 3/10.$$

On définit deux fonctions f_1 et f_2 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par : $f_1(x, y) = e^{Q_1(x, y)}$, $f_2(x, y) = 2 \cdot e^{Q_2(x, y)}$.

II.B.1) f_1 admet-elle des extremums ? Si oui, quelle en est la nature ?

II.B.2) Même question pour f_2 .

II.B.3) Montrer que, sur la droite ($y = 2x$), les fonctions Q_1 et Q_2 prennent des valeurs égales en deux points que l'on déterminera.

II.C) On considère la transformation du plan définie par : $F(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$.

II.C.1) Montrer que F admet un point fixe en $(1, 2)$, c'est-à-dire tel que : $F(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

II.C.2) Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation ($z = f_1(x, y)$) au point $(1, 2)$. Même question pour f_2 .

II.C.3) Déterminer la matrice jacobienne J de la transformation F en $(1, 2)$. Cette matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? (Elle est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de vecteurs propres).