TSI2 / DS3-2009-2010.

CCP 2008 maths 2.

Les calculatrices sont interdites.

****

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

****

● *Exercice* :

On pose $I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}.dx}{1+x^b}$, où a et b sont réels.

1. Énoncer le ou les critères de convergence qui vous semblent adaptés à l'étude de cette intégrale.
2. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) pour lesquels l'intégrale $I(a, b)$ converge.
3. Représenter graphiquement ce domaine de convergence dans le plan (a, b).

● *Problème* : Toutes les parties de ce sujet sont indépendantes entre elles et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

• *Partie I* : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x.\cos(x) - \sin(x)$. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.1. Justifier la possibilité de restreindre l'étude de f à $\mathbb{R}^+$.

1.2. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C})$?

2. On note I_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ pour $n \in \mathbb{N}$. Étudier, en fonction de la parité de n, les variations de f sur I_n.

3.1. Montrer que les points de $(\mathcal{C})$ d'abscisse x tels que $f'(x) = 0$ sont situés sur deux droites dont on précisera les équations.

3.2. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ pour $x \in [-2\pi, 2\pi]$ (*échelle = 2 carreaux sur les axes*).

4.1. Montrer que l'équation $(f(x) = 0)$ admet dans tout intervalle I_n une solution unique. On note x_n cette solution, qu'on ne cherchera pas à calculer.

4.2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n < (2n+1)\pi/2$.

4.3. Donner un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini.

4.4. Montrer que $x_n = n\pi + \text{Arctan}(x_n)$.

4.5. En déduire que $x_n = (2n + 1).\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \varepsilon_n$, où ε_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini (*on rappelle que pour $x > 0$, $\text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\frac{1}{x})$, et que $\text{Arctan}(u)$ est équivalent à u au voisinage de 0*).

• *Partie II* : Soit g une fonction réelle de variable réelle, de classe C^1 par morceaux, de période T. On note $\omega = 2\pi/T$ la pulsation de g, et Δ un intervalle de longueur T. Pour n entier naturel, on note a_n et b_n les coefficients de Fourier trigonométriques de g, donnés par :

$a_0 = \frac{1}{T}.\int_\Delta g(t)dt$; et pour $n \geq 1$: $a_n = \frac{2}{T}.\int_\Delta g(t)\cos(n\omega t)dt$, $b_n = \frac{2}{T}.\int_\Delta g(t)\sin(n\omega t)dt$.

Pour $n \geq 1$, on appelle harmonique de rang n la quantité $h_n(t) = a_n.\cos(n\omega t) + b_n.\sin(n\omega t)$. On pose $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, qu'on appelle amplitude de h_n.

1. Montrer que si r_n est non nul, il existe φ_n tel que $h_n(t) = r_n.\cos(n\omega t - \varphi_n)$. On appelle φ_n phase de h_n (*par convention, on choisit $\varphi_n \in]-\pi, \pi[$; si r_n est nul, φ_n n'existe pas*).

2. On choisit dans cette question la fonction g de période T définie par : $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T/2[\\ 0 & \text{si } t \in [T/2, T[\end{cases}$.

2.1. Que peut-on dire de $g - \frac{1}{2}$?

2.2. Que peut-on en déduire pour les coefficients de Fourier de g ?

2.3. Écrire le développement en série de Fourier de g.

2.4. Quelle est la somme de cette série ? (*On énoncera de façon précise le théorème utilisé*).

2.5. Exprimer r_n et φ_n si elle existe.

3. On considère la série numérique de terme général $u_p = (-1)^p/(2p + 1)$ pour $p \geq 0$.

3.1. Montrer que cette série est convergente.

3.2. Déduire de la question 2, la somme $\sum_{p\geq 0} u_p$.

4. On conserve les notations des questions 2 et 3 ci-dessus.

4.1. Énoncer la formule de Parseval.

4.2. Calculer $\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

4.3. En déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

• *Partie III* : On note Δ l'opérateur laplacien : soit W un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et f élément de $C^2(W, \mathbb{R})$,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

1. On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et on s'intéresse à une fonction f telle que $f(x, y, z) = u(r)$. Montrer que pour $r \neq 0$, on a : $\Delta f = u''(r) + 2.u'(r)/r$.

On considère dans les mêmes conditions, l'équation : $\Delta f = -\omega^2 f$, où ω est un réel strictement positif, c'est-à-dire l'équation (U) : $u''(r) - 2.u'(r)/r = -\omega^2 u(r)$.

2. On définit la fonction v par : $v(r) = r.u(r)$. Montrer que v vérifie l'équation différentielle (V) : $v'' + \omega^2 v = 0$.

3. Résoudre l'équation (V), en déduire pour $r \neq 0$ les solutions réelles de (U).

4. Déterminer les solutions non nulles de (U) admettant une limite finie quand r tend vers 0.

5. On ne conserve pour la suite que les solutions obtenues à la question 4 ci-dessus. On impose de plus $u'(1) = 0$. Déterminer l'équation (Ω) que doit vérifier ω pour que cette condition supplémentaire soit satisfaite.

6. Montrer graphiquement que l'équation (Ω) admet une solution et une seule dans tout intervalle $]\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n + 1)\pi[$, où n est un entier naturel.

On notera ω_n cette solution, qu'on ne cherchera pas à calculer.

7. Si n et p sont deux entiers naturels distincts, on note u_n et u_p deux solutions de (U) associées respectivement aux valeurs ω_n et ω_p solutions de (Ω). Montrer que : $\int_0^1 u_n(r)u_p(r)r^2dr = 0$.