TSI2 / DS4-2008-2009.

Maroc 2000 Math 2 (m006t2e).

On note $[\![a, a+n]\!] = \{a, a+1, a+2, ..., a+n\}$.

I) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_0 = x_{n+1} = 0$, et on considère le système (S_n) formé des n équations :

(S_n) : $-x_{k+1} + 2x_k - x_{k-1} = y_k$, $k \in [\![1, n]\!]$, où les x_k sont les inconnues et les y_k des nombres réels connus.

1.*a*) Écrire la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du système (S_n). Résoudre le système quand $y_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

b) Pour $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, que peut-on conclure sur l'existence et l'unicité des solutions du système (S_n) ? Que peut-on alors dire de la matrice A_n ?

2) Soit $j \in [\![1, n]\!]$ fixé ; on suppose que $y_j = 1$ et $y_k = 0$ si $k \neq j$. Calculer la solution du système (S_n) et en déduire que :

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1-1/(n+1) & 1-2/(n+1) & \cdots & 1-n/(n+1) \\ 2(1-1/(n+1)) & 2(1-2/(n+1)) & \cdots & 2(1-n/(n+1)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n(1-1/(n+1)) & n(1-2/(n+1)) & \cdots & n(1-n/(n+1)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(n-1) & -(n-2) & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

3) On suppose à présent que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $y_k = 1$. Calculer la solution du système (S_n).

4) Montrer que pour tout réel θ, et pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$-\sin((k-1)\theta) + 2.\sin(k\theta) - \sin((k+1)\theta) = 2(1-\cos(\theta)).\sin(k\theta).$$

En déduire que A_n possède n valeurs propres distinctes et trouver pour chacune un vecteur propre associé. (*Indication* : On pourra chercher des vecteurs propres de la forme : $\begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \vdots \\ \sin(n\theta) \end{pmatrix}$).

II) On fixe un entier $n \geq 2$, $a = (a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b = (b_0, b_1, ..., b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, et $c = (c_1, c_2, ..., c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on considère la matrice carrée d'ordre k :

$$T_k = T_k(a, b, c) = \begin{pmatrix} b_0 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_2 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{k-2} & b_{k-2} & c_{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{k-1} & b_{k-1} \end{pmatrix}.$$

On note : $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = b_0$, et $\delta_k = \det(T_k)$ pour tout k, $2 \leq k \leq n$.

1) Pour $k \in [\![2, n]\!]$, exprimer δ_k en fonction de δ_{k-1} et δ_{k-2}.

2) Pour cette question uniquement, on fixe $n = 4$, et on suppose que pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$ on a $\delta_k \neq 0$.

a) En utilisant la méthode du pivot de Gauss, expliciter une matrice triangulaire inférieure $L = (\ell_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$, avec $\ell_{ii} = 1$ pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, et une matrice triangulaire supérieure $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$, telles que : $T_4 = LU$.

b) Montrer que cette factorisation est unique.

c) Déterminer la factorisation "LU" de la matrice A_4 associée au système (S_4) de la première partie.

d) On pose : $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix}$. Résoudre les systèmes linéaires : $LZ = Y$ et $UX = Z$; en déduire la solution du système : $A_4X = Y$.

3.*a*) Montrer que la matrice $T_n(a, b, a)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) On suppose que $a_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Soit λ une valeur propre de $T_n(a, b, a)$; montrer que le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1. Que peut-on dire des valeurs propres de $T_n(a, b, a)$?

4.*a*) Trouver une formule de récurrence simple concernant le polynôme caractéristique de la matrice $T_n(a, b, a)$.

b) On note $I = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n-1}$, et $a \times c = (a_1c_1, a_2c_2, \dots, a_{n-1}c_{n-1})$. Montrer que les matrices $T_n(a, b, c)$ et $T_n(I, b, a\times c)$ ont les mêmes valeurs propres (on pourra utiliser la question précédente).

c) On suppose que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $a_ic_i > 0$; Montrer que $T_n(a, b, c)$ admet n valeurs propres distinctes (*Indication* : on pourra utiliser les questions II.3.a) et II.4.b) après avoir remarqué la relation $a_ic_i = \sqrt{a_ic_i}\sqrt{a_ic_i}$).

d) Donner un exemple de matrice $T_3(a, b, c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, non diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

III) E désigne l'espace des polynômes à coefficients réels ; E_n est le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}_+^*$ une application continue telle que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\int_{-1}^{1} x^k.f(x)dx$ soit convergente.

1) Soit $(P, Q) \in E^2$; on définit $\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)f(x)dx$.

a) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ est un produit scalaire sur E.

b) Justifier l'existence d'une famille orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait : $deg(P_k) = k$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout $Q \in E_{k-1}$, on a : $\langle P_k|Q\rangle = 0$.

2) Soit $k \geq 2$ et $j \leq k - 2$; montrer que : $\langle XP_k|P_j\rangle = 0$.

3) Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j}.X^j$. Établir l'existence de deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$(1)\quad \begin{cases} XP_0 = a_1P_1 + b_0P_0 \\ XP_k = a_{k+1}P_{k+1} + b_kP_k + a_kP_{k-1} \quad \text{pour } k \geq 1 \end{cases}$$

avec : $a_k = \alpha_{k-1,k-1}/\alpha_{k,k}$ pour $k \geq 1$, $b_0 = -\alpha_{1,0}/\alpha_{k,k}$, $b_k = \alpha_{k,k-1}/\alpha_{k,k} - \alpha_{k+1,k}/\alpha_{k+1,k+1}$ pour $k \geq 1$.

4) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $\int_{-1}^{1} P_k(x)f(x)dx$, et en déduire que P_k ne peut garder un signe constant sur $]-1, 1[$, et qu'il admet donc au moins une racine d'ordre de multiplicité impaire.

b) Soit $x_1, \dots, x_r$ les racines distinctes de P_k d'ordre de multiplicité impaire et appartenant à $]-1, 1[$; on pose : $Q = \prod_{i=1}^{r}(X - x_i)$. Donner le degré du polynôme QP_k, et montrer que l'application $(t \mapsto Q(t)P_k(t))$ garde un signe constant sur $[-1, 1]$. Montrer par un raisonnement par l'absurde que $r = k$, et conclure que P_k admet k racines simples dans $]-1, 1[$.

5) Soit $n \geq 2$; à la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on associe la matrice $T_n(a, b, a) = T_n$, où les vecteurs $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ et $b = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ ont pour composantes les coefficients définis par la relation de récurrence (1) de la question III.3.

a) Pour tout réel x, calculer le produit : $T_n.\begin{pmatrix} P_0(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix}$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, les racines de P_n sont les valeurs propres de T_n.

6) On note Arccos la bijection réciproque de la fonction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. On admet que la restriction à $]-1, 1[$ de la fonction Arccos est une fonction de classe C^∞. Jusqu'à la fin du problème on pose :

$\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$; pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1, 1[$, on définit : $t_k(x) = \cos(k.\mathrm{Arccos}(x))$.

On définit de manière équivalente t_k par : $\forall \theta \in]0, \pi[$, $t_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$.

a) Donner une expression explicite de t_0, t_1 et t_2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-1, 1[$, $t_{k+1}(x) = 2xt_k(x) - t_{k-1}(x)$. En déduire que t_k est une fonction polynôme de degré k et donner son coefficient dominant.

b) En utilisant le changement de variable $\theta = \text{Arccos}(x)$, calculer $<t_n|t_m>$ pour (n, m) dans $\mathbb{N}^2$ (on distinguera les cas $n = m$ et $n \neq m$). Que peut-on conclure ?

c) À l'aide de la famille $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, expliciter une famille orthonormale $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de l'espace préhilbertien $(E, <|>)$.

d) Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer la matrice T_n associée à la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Calculer les vecteurs propres et les valeurs propres de T_n.