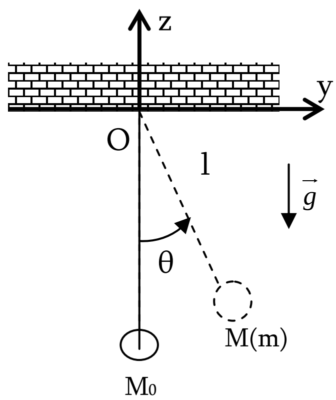
Problème 1 : Le Botafumeiro de Compostelle

Le botafumeiro est un encensoir géant qui est fixé à la croisée du transept de la cathédrale de St Jacques de Compostelle. Sa taille (1,6 m de haut et m = 54 kg) s'explique par le besoin de parfumer la cathédrale pour cacher la forte odeur des pèlerins qui dormaient dans la nef...

Pour diffuser le parfum d'encens, il faut faire osciller l'encensoir, malgré sa forte inertie. On s'aperçut rapidement qu'il était possible de lui donner une amplitude considérable et de lui faire atteindre la hauteur des voûtes du transept (20,6 m), à l'aide d'un système de poulies permettant à un groupe d'hommes de tirer sur une corde en cadence (corde de longueur moyenne 21,5 m). Cela donne toujours à certaines dates particulières, un spectacle impressionnant : le botafumeiro décrit un arc de 60 m en rasant le sol à 68 km/h !!!

Il s'agit d'étudier le mouvement de ce pendule dont la longueur de la corde peut varier selon l'action du groupe d'homme. Le référentiel terrestre $\Re_G\left(0;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z,t\right)$ sera supposé galiléen, le pendule ponctuel M, de masse m = 54kg, et le fil sans raideur ni masse, de longueur maximale l_0 = 22m. Le champ de pesanteur terrestre est supposé uniforme, de valeur $g = 10 m.s^{-1}$. L'extrémité O de la corde est fixe. Le pendule est soumis à une force de frottement fluide du type $\vec{f} = -h\vec{v}$ $\left(h = 2\ s.i.\right)$

Partie 1 : Longueur de corde constante $l = l_0$:



1.1. Faire un schéma du pendule en mouvement représentant toutes les forces et en définissant une base de projection polaire adaptée,

1.2. Etablir les expressions de $\vec{v}(M/\Re_G)$ et de $\vec{a}(M/\Re_G)$ dans la base polaire (longueur de corde constante $l = l_0$), et en déduire l'énergie cinétique de M.

1.3. Quelles sont la ou les force(s) conservative(s) auxquelles est soumis le pendule ? Pour chacune d'entre elle, redémontrer la valeur de l'énergie potentielle associée en fonction du paramètre θ et des constantes du problème. On fixera l'origine de l'énergie potentielle pour le pendule en position verticale.

1.4. Par une méthode énergétique, déterminer l'équation satisfaite par θ.

1.5. Définir ce qu'est un oscillateur harmonique. S'agit-t-il ici d'un oscillateur harmonique, et dans quelles conditions ? Que peut-on dire de la nature du mouvement ?

1.6. Pour mettre l'encensoir en mouvement, deux pèlerins le poussent avec une force constante de 200N chacun sur une distance d = 2m à partir d'une position où il est immobile. On suppose que le pendule a un mouvement horizontal sur cette distance, et qu'ils le lâchent lorsque la corde est à la verticale en M_0. Déterminer la vitesse v_0 acquise en M_0 (expression littérale puis numérique)

1.7. Dans le cas où les frottements sont négligeables, quels sont la hauteur $\Delta H = z+l$ et l'angle maximal θ_{max} atteints par le pendule ?

1.8. Déterminer entièrement l'équation horaire du mouvement (avec les frottements et avec l'approximation harmonique).

1.9. Quelle est la dimension de h ? Calculer le facteur de qualité du pendule. ainsi que la pulsation propre des oscillations. Quelle sera la période des oscillations ? Représenter approximativement l'allure de θ en respectant les échelles.

1.10. Au bout de combien de temps les amplitudes ont diminué de moitié ? (valeur littérale et numérique). Ce type d'excitation est-il à votre avis suffisant pour encenser toute la cathédrale ?

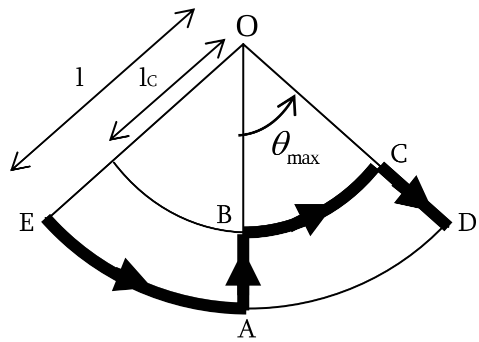
Partie 2 : Avec variation de la longueur de la corde l :

On souhaite amplifier l'amplitude des oscillations et pouvoir les entretenir sans être obligé de pousser l'encensoir à chaque passage !!! Pour cela, on place à l'autre bout de la corde un groupe d'homme qui sera chargé de faire varier la longueur du fil au moment opportun pour communiquer de l'énergie au pendule. La corde est alors tenue en O par des poulies que l'on supposera sans frottement.

Pour simplifier le problème, on supposera que la longueur du fil ne peut prendre que 2 valeurs : sa valeur nominale l = 22m (de la partie 1) et une valeur raccourcie l_C = 16m lorsque les hommes tirent dessus. On négligera les états intermédiaires dus à la course des hommes. Ceux-ci peuvent faire varier la longueur soit à la verticale, soit lorsque θ est maximal. On considère que ces actions ne modifient pas l'énergie cinétique du pendule (l'énergie cinétique juste avant est la même que celle juste après).

Les frottements de l'air sont NEGLIGES dans cette partie.

2.1 Exprimer les énergies potentielles et cinétiques en chacun des points A, B, C et D.



2.2 Quelle influence a l'action de rallonger la corde sur l'énergie mécanique ? Et de raccourcir la corde ?

2.3 Exprimer la variation d'énergie mécanique du pendule lorsqu'il passe de A vers B puis de C vers D.

2.4 Si on veut amplifier les oscillations, vaut-il mieux raccourcir la corde en AB puis la rallonger en CD ou bien l'inverse ?

2.5 Sur une demi période (de E à D par exemple) dont l'angle maximal est noté θ_{max} (comme sur l'illustration), quelle est la variation d'énergie mécanique apportée ?

2.6 Après avoir été poussé par des pèlerins, supposons que le pendule atteint l'angle $\theta_1 = 20°$. Quelle sera l'altitude ΔH_2 et l'angle θ_2 atteint à la prochaine demi oscillation, puis ΔH_3 et l'angle θ_3 à la suivante ?

2.7 Va-t-il falloir beaucoup d'oscillations pour atteindre le sommet de la voûte ?

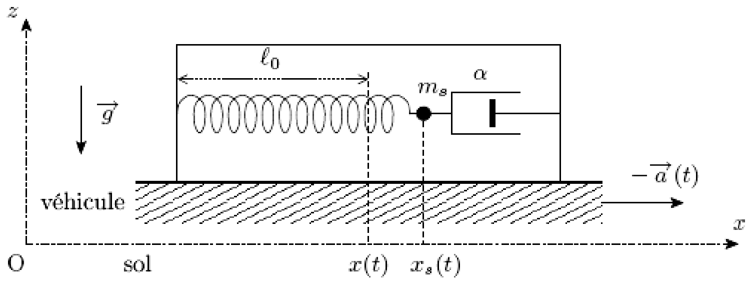
2.8 En réalité, le pendule est encore plus efficace, car la variation de la longueur du pendule se fait progressivement sur les quarts de période. Essayez d'expliquer pourquoi.

Problème 2 : Étude d'un accéléromètre

Lors des simulations d'accident automobile, on équipe un véhicule d'appareils de mesure parmi lesquels l'accéléromètre, destiné à la mesure de la décélération lors du choc. Il est constitué d'une masse sismique m_s fixée à l'extrémité d'une poutrelle verticale d'acier inox, dont l'autre extrémité est solidement encastrée dans le bâti rigide d'un boîtier, lui-même fixé au véhicule. Le boîtier est rempli d'une huile de silicone exerçant une force d'amortissement visqueux de coefficient α sur la masse m_s, du type

$$\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}^*$$

où $\overrightarrow{v}^*$ est la vitesse de la masse sismique relativement au boîtier. D'autre part, l'élasticité de la poutrelle génère une force de rappel élastique de coefficient k opposée au déplacement horizontal de m_s par rapport au boîtier. On peut schématiser l'ensemble du dispositif de la manière suivante :



On appelle (Ox) l'axe horizontal orienté dans le sens du mouvement du véhicule et (Oz) l'axe vertical ascendant. La position du boîtier est repérée par l'abscisse $x(t)$ par rapport au sol de la position de m_s lorsque le ressort a sa longueur à vide ℓ_0, la position de m_s par rapport au sol est repérée par son abscisse $x_s(t)$. On note $x^*(t) = x_s(t) - x(t)$ le déplacement relatif de m_s par rapport au boîtier.

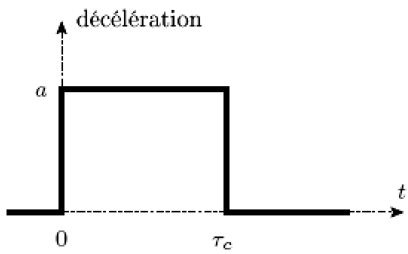
Le référentiel d'étude est le référentiel lié au sol, supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\overrightarrow{g}$.

I. Établir que x^* vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{x}^* + 2\,\xi\,\omega_0\,\dot{x}^* + {\omega_0}^2 x^* = a(t)$$

où $a(t)$ est la décélération du véhicule pendant le choc. Exprimer le coefficient d'amortissement ξ et la pulsation propre ω_0 en fonction de m_s, k et α.

On étudie la réponse de l'accéléromètre à un créneau de choc de décélération constante a et de durée τ_c, débutant à la date $t = 0$. On suppose que la masse sismique est immobile par rapport au boîtier avant le choc.



II. À partir de l'équation différentielle établie ci-dessus, préciser les types de mouvement possibles $x^*(t)$ en fonction de la valeur de ξ. Tracer pour chacun d'eux l'allure de la courbe $x^*(t)$ (aucune démonstration n'est demandée).

III. On choisit le liquide de remplissage du boîtier et la forme du dispositif mobile de manière à obtenir un retour de m_s à l'équilibre le plus rapide possible. Quelle est alors la valeur de ξ et l'expression de α en fonction de m_s et k ?

IV. Établir alors la solution $x^*(t)$ *pendant le choc*, en fonction de a et ω_0. Montrer que la vitesse $\dot{x}^*$ passe par un maximum à un instant τ que l'on exprimera en fonction de ω_0.

V. Soit x^*_∞ la valeur théoriquement atteinte au bout d'un temps « infini » durant le choc. Exprimer $\dfrac{x^*}{x^*_\infty}$ en fonction de $\dfrac{t}{\tau}$ et tracer l'allure du graphe correspondant.

VI. La durée typique du choc est $\tau_c = 0,1$ s. Comment faut-il choisir τ par rapport à τ_c pour que $x^*(t)$ restitue fidèlement l'allure du choc ? Montrer que le choix $\omega_0 = 10^4$ rad.s^{-1} convient et calculer la valeur du déplacement x^*_∞ pour $a = 400$ m.s^{-2}.