DS6 – 09/04/2009 – Problème 1 : RNG – Les Chaises Volantes

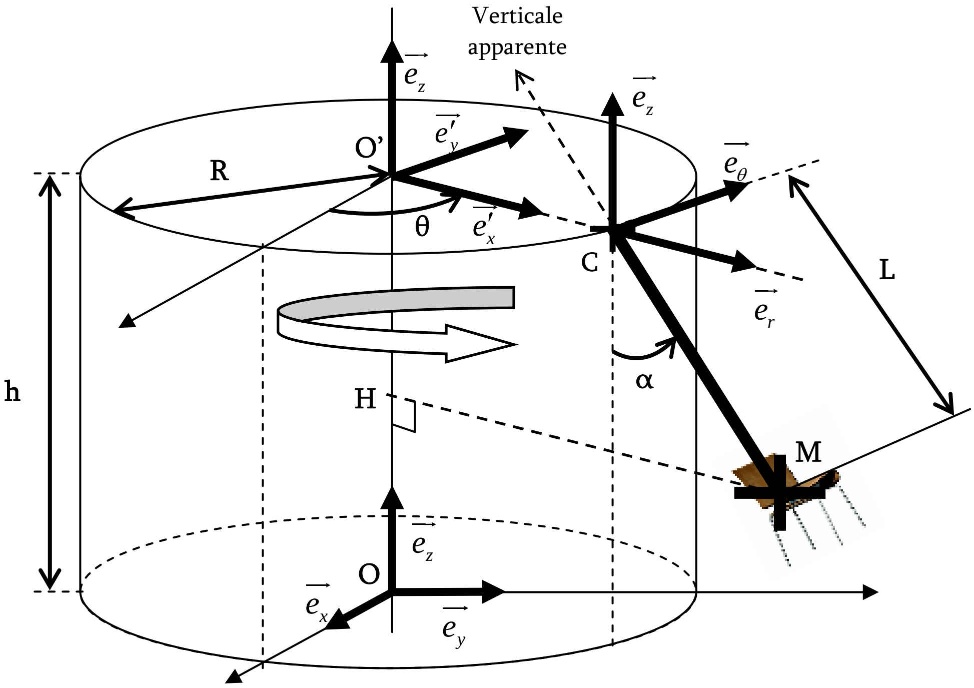
Les Chaises volantes sont un type de manège rotatif dans lesquelles des sièges sont suspendus depuis le haut du manège au bout de chaînes métalliques. Lors de la rotation du manège, les chaises sont inclinées par la force centrifuge vers l'extérieur. On se propose d'étudier dans ce problème cette attraction.

Pour simplifier l'étude du problème, on supposera que le manège tourne à une vitesse angulaire ω constante, et que le disque sur lequel sont accrochées les chaînes retenant les chaises ne peut pas s'incliner. Il restera à tout instant horizontal. Chaque chaise M a une masse m, et est soumise à son poids dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ supposé uniforme. On propose le schéma suivant permettant de définir les trois référentiels qui seront étudiés dans ce problème :

→ Référentiel $\Re_G = \left(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$ lié à la base du manège, supposé galiléen

→ Référentiel $\Re_T = \left(O', \vec{e'_x}, \vec{e'_y}, \vec{e_z}\right)$ tournant avec le disque supérieur du manège

→ Référentiel $\Re_C = \left(C, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}\right)$ cylindrique



Partie 1 : Etude dans le référentiel galiléen $\Re_G = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$

1.1 Rappeler ce qu'est un référentiel galiléen.

1.2 Faire un bilan des forces auxquelles est soumis M dans ce référentiel (on peut utiliser tous les vecteurs disponibles, même si ils ne font pas partie de la base définissant $\Re_G$)

1.3 Exprimer la position, la vitesse et l'accélération du point C dans le référentiel $\Re_G$, dans la base cylindrique en fonction de R, de h et de ω.

1.4 Exprimer la position, la vitesse et l'accélération du point M dans le référentiel $\Re_G$, également dans la base cylindrique et en fonction de R, h, L, α (constant) et de ω.

1.5 Appliquer le PFD à la chaise M, et en déduire la relation : $R\omega^2 + L\omega^2 \sin\alpha = g\tan\alpha$

Partie 2 : Etude dans le référentiel tournant $\Re_T = \left(O', \overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e'_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$

2.1 Le référentiel $\Re_T$ est-il galiléen ?

2.2 Définir les deux vecteurs permettant de décrire le mouvement de $\Re_T$ par rapport à $\Re_G$ (vitesse de l'origine $\overrightarrow{v_{O'/\Re_G}}$ et vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{\Re_T/\Re_G}}$).

2.3 Redémontrer les formules générales des lois de composition des vitesses et des accélérations

2.4 Donner les expressions simplifiées des accélérations d'entraînement et de Coriolis du point M dans le référentiel $\Re_T$, dans le cas étudié ici, en fonction de L, R, ω, et α. On pourra utiliser le projeté orthogonal H de M sur l'axe (Oz).

2.5 Donner l'expression de la force centrifuge.

2.6 Appliquer le PFD à la chaise M dans $\Re_T$. Obtient-on la même équation qu'à la question 1.5. Expliquer la différence entre les 2 méthodes adoptées. Laquelle vous paraît la plus simple ? Peut-on mettre en évidence la force centrifuge avec la première approche proposée ?

2.7 On définit le poids apparent comme la somme du poids réel et de la force centrifuge. La direction portant ce poids apparent est appelée verticale apparente. C'est dans cette direction que l'homme assis sur la chaise a l'impression d'être attiré. Montrer qu'il s'agit de la direction de la chaîne tenant la chaise (on projettera sur l'axe perpendiculaire à cette verticale apparente).

2.8 Dans le cas où le manège se met à monter, qu'est-ce qui est modifié dans les équations ? Comment évolue l'angle α ?

Partie 3 : Etude dans le référentiel cylindrique $\Re_C = \left(C, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}\right)$

3.1 Le référentiel $\Re_C$ est-il galiléen ?

3.2 Définir les deux vecteurs permettant de décrire le mouvement de $\Re_C$ par rapport à $\Re_G$ (vitesse de l'origine $\overrightarrow{v_{C/\Re_G}}$ et vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{\Re_C/\Re_G}}$).

3.3 Donner les relations simplifiées des accélérations d'entraînement et de Coriolis du point M dans le référentiel $\Re_C$ dans le cas étudié ici, en fonction de L, R, ω, et α.

3.4 Obtient-on les mêmes résultats en appliquant le PFD ? Comparer cette méthode avec les deux méthodes précédentes.

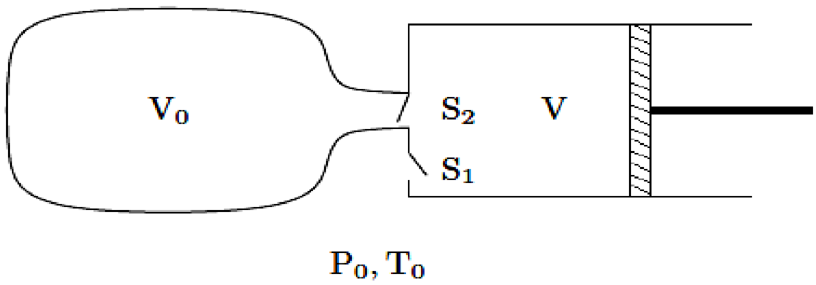
DS6 – 09/04/2009 – Problème 2 : GPM – Bouteille de Plongée

Ce problème est constitué de DEUX PARTIES INDEPENDANTES, concernant le remplissage d'une bouteille de plongée, puis son utilisation par un plongeur en situation au fond de la mer.

Partie 1 : Remplissage de la bouteille avec un compresseur alternatif

Un compresseur alternatif à piston est destiné à gonfler une bouteille de plongée de volume V_0. On note V_{min} le volume minimal du cylindre du compresseur (permettant le jeu des soupapes) et V_{max} son volume maximal. L'air ambiant est à la température T_0 sous la pression P_0.

Données : V_0 = 15L ; V_{min} = 2cm^3, V_{max} = 400cm^3, P_0 = 1bar.



Au départ du premier cycle, la pression dans la bouteille est P_0 et le piston est contre les soupapes (soit $V=V_{min}$), la soupape S_1 étant ouverte et la soupape S_2 fermée. On supposera que le jeu aux soupapes a lieu lorsque la pression est quasiment la même de part et d'autre. On fait l'hypothèse qu'au cours de toutes les opérations, la température de l'air dans la bouteille et dans le compresseur reste constamment égale à T_0. L'air est assimilé à un gaz parfait.

1. Dans le cas où on néglige le volume minimal V_{min} (cas idéal), exprimer la pression P_1 dans la bouteille après le premier aller-retour (fin du premier cycle). Calculer P_1 (à 4 chiffres significatifs près).

2. Dans ce cas idéal, quelle est la pression au bout de k cycles, et combien faudrait-il de cycles pour gonfler la bouteille à 200bar ?

3. On ne néglige plus le volume V_{min} (cas réel), et on envisage le $n^{ème}$ cycle. Au départ de ce cycle, le piston est contre les soupapes, la pression dans la bouteille et dans le volume V_{min} est alors notée P_{n-1} et les soupapes sont fermées.

   3.1 Montrer la relation $P_{n-1}V_0 + P_0V_{max} = P_n\left(V_0 + V_{min}\right)$ (à expliquer clairement)

   3.2 Exprimer le volume V_1 du cylindre au moment où la soupape S_1 s'ouvre à l'aller du piston

   3.3 Exprimer le volume V_2 du cylindre au moment où la soupape S_2 s'ouvre lors du retour du piston

4. Exprimer la pression limite P_∞ dans la bouteille en fonction de P_0, V_{min} et V_{max}. Calculer P_∞. Quel est le facteur qui limite ici la pression P_∞ ? Comment faire pour l'améliorer ?

5. En posant $u_n = P_n - P_\infty$, montrer que la suite u_n est une suite géométrique dont on donnera la raison β. En déduire l'expression de P_n en fonction de P_0, P_∞, β et n, puis en fonction de P_0, P_∞, V_{min}, V_0 et n.

6. Calculer à partir de quel nombre de cycle n_{lim} la pression dans la bouteille diffère de P_∞ de un centième en valeur relative (bien donner l'expression littérale)

7. Le piston est entraîné grâce à un système bielle manivelle par un moteur électrique tournant à 1500 tours par minute. Calculer le temps de gonflage Δt de la bouteille dans le cas idéal et le cas réel.

Partie 2 : Utilisation de la bouteille

La pression dans la bouteille peut varier de 100 à 200 bar en début de plongée jusqu'à 30 à 50 bar en fin de plongée (ou moins en cas de nécessité). La réserve de sécurité est caractérisée par la pression de seuil p_S. Il faut ramener la pression de l'air sortant de la bouteille à la pression ambiante, pression de l'air respiré par le plongeur. On utilise pour cela un détendeur : dispositif inséré entre la bouteille d'air et la bouche du plongeur, qui fournit de l'air à la demande de ce dernier. Le détendeur possède ainsi plusieurs fonctions :

→ Il réduit la pression de l'air issu de la bouteille à la pression P(z) de l'endroit où se trouve le plongeur

→ Il fournit la quantité d'air nécessaire à la respiration du plongeur à la pression P(z)

→ Il se bloque lorsque la pression P_b de l'air dans la bouteille devient de l'ordre de la pression seuil p_S. Le plongeur est alors averti qu'il doit passer sur la réserve et remonter.

On sait que la pression P(z) évolue avec la profondeur z à laquelle se trouve le plongeur, tel que $P(z) = P_0 + \rho g z$. On compte z = 0 au niveau de la surface, et z positif dans l'eau. L'air sera considérée comme un gaz parfait dans toute cette partie. On donne la constante des gaz parfaits $R=8{,}314 J.K^{-1}.mol^{-1}$, et la masse molaire de l'air $M_{air}=29 g.mol^{-1}$.

8. Au début de la plongée, la bouteille, de volume V_b, est remplie d'air à la température $T_b = T_a$ sous la pression P. En profondeur ou à la surface, la bouteille et son contenu prennent instantanément la température T_e, constante, de l'eau environnante. Exprimer le nombre de moles d'air contenues dans la bouteille, d'une part en début de plongée n_i, hors du bateau à $T_b = T_a$, et d'autre part au moment où le détendeur se bloque n_f, dans l'eau à $T_b = T_e$.

9. Faire l'AN pour n_i et n_f : P=200bar, p_S=5bar, V_b=15L, T_a=293K et T_e=288K. Calculer également la quantité Δn de moles d'air que le plongeur pourra utiliser durant cette plongée.

10. Calculer la masse d'air contenue dans la bouteille initialement m_i et quand le détendeur se bloque m_f. (expression littérale et application numérique).

11. La respiration du plongeur est périodique, de fréquence f. Sous la pression locale P(z) à la température T_e, le volume moyen inspiré au cours de chaque cycle (avant d'être ensuite rejeté à l'extérieur) est Γ_0. Exprimer la durée $\Delta t_S(z)$ au bout de laquelle le détendeur se bloque lorsque le plongeur reste à une profondeur z constante (on néglige les temps de descente et de remontée), en fonction de la pression P(z), de f, de Γ_0, R, T_e et de Δn.

12. Faire l'AN pour z=20m, Γ_0=2L, $f=0{,}2 s^{-1}$, T_e=288K. On rappelle que $g=10 m.s^{-2}$ et $\rho_{eau}=10^3 kg.m^{-3}$. Faites également le calcul si le plongeur reste à la surface (z=0, $T=T_e$), et comparer les valeurs. Interprétez ces différences. Avec la même bouteille, où pourra-t-on apprécier le plus longtemps les poissons ? Sur une épave à 100m de profondeur, ou dans un barrière de corail à 10m de profondeur ? Justifier.

13. Le volume du poumon peut varier entre 2 valeurs extrêmes : V_{inf} = 1L est la limite d'écrasement du poumon (on ne peut pas le vider plus), et V_{sup} = 5L est la limite d'éclatement du poumon. On suppose ici que le poumon est une simple poche d'air. En respirant au maximum ($V=V_{sup}$) à la surface sans bouteille, jusqu'à quelle profondeur peut-on descendre avant écrasement ?

14. Le plongeur se trouve maintenant à 10m de profondeur avec sa bouteille, et il vient de respirer 2L (volume totale dans les poumons V = 3L). Tout d'un coup, il voit un requin, se crispe, et remonte immédiatement en bloquant sa respiration. Quel est le volume du poumon lorsqu'il arrive à la surface ? Que se passe-t-il ? Que faut-il faire lorsque l'on remonte ?