D) TD : Espaces préhilbertiens.

D1.1) Montrer que, pour $(u, v) \in E^2$ (E espace préhilbertien réel) :

u et v colinéaires et de même sens $\Leftrightarrow$ $(u|v) = ||u||.||v||$ $\Leftrightarrow$ $||u + v|| = ||u|| + ||v||$.

u et v colinéaires et de sens contraires $\Leftrightarrow$ $(u|v) = -||u||.||v||$ $\Leftrightarrow$ $||u - v|| = ||u|| + ||v||$ $\Leftrightarrow$ $||u + v|| = |\,||u|| - ||v||\,|$.

D1.2) Soit u un vecteur fixé non nul, un réel α, et f définie pour tout vecteur $x \in E$ par : $f(x) = x - \alpha(x|u).u$; trouver α pour que : $\forall (x, y) \in E^2$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$.

D1.3) Soit E un espace euclidien de dimension 4, muni de la base orthonormale $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$; donner la matrice du projecteur orthogonal sur $F = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + 2e_4)$, puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4)$.

D1.4) Soit E l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur $[0, 1]$. Vérifier que l'application : $(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ est bien un produit scalaire. Donner la norme des vecteurs $u = (x \mapsto x.\ln(x))$ et $v = (x \mapsto x)$. Calculer $\inf\{\int_0^1 (x.\ln(x) - ax^2 - bx)^2dx,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. (Pour $p \geq 0$ et $q \geq 1$: $\int_0^1 x^p.\ln^q(x)dx = (-q/(p + 1)).\int_0^1 x^p.\ln^{q-1}(x)dx$).

D1.5) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; vérifier que l'application $(M|N) = \mathrm{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire. Donner la norme de la matrice identique, et de la matrice $N = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ avec $a_{i,j} = i + j$ (utiliser les formules de la somme des carrés et de la somme des cubes). Calculer ensuite les minimums : $\inf\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (x_{i,j} - i - j)$, avec $(x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\}$ où $\mathcal{A}$ est le sous-ensemble de E des matrices antisymétriques, et $\inf\{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (x_{i,j} - i - j)^2$, avec $(x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{A}\}$. (Montrer que les matrices symétriques et antisymétriques sont orthogonales pour ce produit scalaire).

D2.1) Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni d'une base canonique B, et la famille de vecteurs (u, v, w) de coordonnées respectives dans B : $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 1, 0)$. Montrer que cette famille est une base et trouver, si c'est possible, un produit scalaire sur E tel que cette famille soit une base orthonormale pour ce produit scalaire.

D2.2) *a*) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que l'application définie par : $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ (qu'on notera ensuite $(P|Q)$) est un produit scalaire. Donner une base orthonormale de E pour ce produit scalaire dans le cas où $n = 2$.

b) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$; l'application : $(P, Q) \mapsto (P(-1)Q(-1) + 2P(0)Q(0) + P(1)Q(1))/4$ est-elle un produit scalaire ? Si oui donner une base orthonormale.

c) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et l'application : $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{\sup\{d°(P),\, d°(Q)\}} P(k)Q(k)$; mêmes questions (Tester l'exemple $f(P_1 + P_2, Q)$ avec $P_1(X) = 1 + X^2$, $P_2(X) = 1 - X^2$ et $Q(X) = X$).

d) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, la série $\sum_k k^n/k!$ converge (hypothèse de récurrence : le rayon de convergence de $\sum_k \frac{k^n x^k}{k!}$ est infini). En déduire que pour tout polynôme P : $\sum_k P(k)/k!$ converge. L'application : $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(k)Q(k)}{k!}$ est-elle un produit scalaire ?

D2.3) *a*) Si E est euclidien, montrer qu'une application $f : E \to E$ telle que pour tout couple de vecteurs (x, y) : $(x|f(y)) = (f(x)|y)$ est linéaire (endomorphisme symétrique). Montrer qu'un projecteur orthogonal vérifie cette propriété (un projecteur orthogonal est donc un endomorphisme symétrique).

b) Pour E euclidien, montrer que toute application $f : E \to E$ telle que pour tout couple de vecteurs (x, y) : $(x|f(y)) = -(f(x)|y)$ est linéaire (endomorphisme antisymétrique) ; montrer que f^2 est symétrique, et : $(f^2(x)|x) \leq 0$, $(f(x)|x) = 0$.

c) Soit un espace euclidien E et une application $f : E \to E$. Montrer l'équivalence suivante :

$$((\forall (x, y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|) \text{ et } (f(0_E) = 0_E)) \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in E^2,\ (f(x)|f(y)) = (x|y)).$$

En déduire qu'elle est linéaire, puis bijective.

D2.4) Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et d'une base orthonormale directe $B = (e_1, e_2, e_3)$ (c'est-à-dire que $e_3 = e_1 \wedge e_2$), et (u, v) un couple de vecteurs fixés non colinéaires et non orthogonaux. L'application f qui à tout couple de vecteurs (x, y) associe : $((x\wedge u)|(y\wedge u))$ est-elle un produit scalaire ? Même question avec $((x\wedge u)|(y\wedge u)) + ((x\wedge v)|(y\wedge v))$. Même question avec $((x|u).x|(y|v).y)$, puis avec $((x|u).u|(y|v).v)$. Soit s la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à $u^\perp$ (symétrie orthogonale), même question avec $(s(x)|s(y))$. Soit s' la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(v, (u, v)^\perp)$, même question avec $(s'(x)|s'(y))$.

- Pour les produits scalaires, donner une base orthonormale.

D3.1) Montrer que si f est une fonction continue de l'ensemble des réels dans lui-même et nulle sur $\mathbb{R}^*$ alors $f(0) = 0$.

D3.2) Montrer que si f est une fonction continue de l'ensemble des réels dans lui-même qui vérifie pour tout couple de réels (x, y) : $f(x + y) = f(x) + f(y)$ alors il existe un réel a fixé tel que pour tout x : $f(x) = ax$.

D3.3) Étudier la continuité de l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f(x, y) = \sup(x, y)$ (montrer d'abord que : $|\sup(x', y') - \sup(x, y)| \leq \sup(|x' - x|, |y' - y|)$). Même question avec : $g(x, y) = |x| + |y|$.

D3.4) Soit : $f(x, y) = x - y$, $g(x, y) = \cos(x) - \cos(y)$ et $h(x, y) = g(x, y)/f(x, y)$ (si $x \neq y$), $h(x, x) = -\sin(x)$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \leq |t|$; puis que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a - b|$. (Utiliser $\cos(p) - \cos(q) = -2.\sin(\frac{p-q}{2})\sin(\frac{p+q}{2})$). Montrer que f et g sont continues, en déduire la continuité de h quand $x \neq y$. Étudier la continuité de h en $(0, 0)$.

Les questions suivantes sont facultatives (mais elles permettent de ne pas traiter le cas $(0, 0)$). Montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, si un réel a vérifie $1 - \varepsilon < a < 1 + \varepsilon$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $t - \varepsilon.|t| \leq ta \leq t + \varepsilon.|t|$. Existe-t-il $\eta > 0$ tel que : pour $|h| < \eta$: $|\sin(h)/h - 1| < \varepsilon/2$, et pour $|k - x_0| < \eta$: $|\sin(k) - \sin(x_0)| < \varepsilon/2$. Étudier ensuite la continuité de h en (x_0, x_0). (Selon deux cas : si $x = y$ ou si $x \neq y$)..

D3.5) Étudier la continuité de l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ (x ou y non nul) et $f(0, 0) = 1$. Même question avec : $g(x, y) = \ln(1 + x^2).\ln(1 + y^2)/(x^2 + y^2)$ (x ou y non nul) et $g(0, 0) = 0$. Même question avec la fonction : $h(x, y) = x.\ln(|x|) + y.\ln(|y|)$ (pour x et y non nuls), $h(0, y) = y.\ln(|y|)$ (pour y non nul), $h(x, 0) = x.\ln(|x|)$ (pour x non nul), $h(0, 0) = 0$.

D4.1) *a*) Développer en série de Fourier la fonction de période 2π définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$; en déduire les sommes : $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^2$, $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(2n + 1)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$, $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(2n + 1)^4$.

b) Développer en série de Fourier la fonction de période 2π définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x^2$; en déduire les sommes $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^2$. (Attention : f n'est pas paire).

D4.2) Développer en série de Fourier la fonction de période 2π définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos(\alpha x)$ où α n'est pas un entier ; en déduire les sommes : $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 - \alpha^2)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/(n^2 - \alpha^2)$. Montrer ensuite l'égalité : $\mathrm{cotan}(x) = 1/x + 2x.\sum_{n=1}^{\infty} 1/(x^2 - n^2\pi^2)$; pour quelles valeurs de x cette égalité est-elle vraie ?

D4.3) Soit $f(x)$ la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^3(nx)/n!$ (x réel) ; déterminer son domaine de définition et montrer qu'elle admet un développement en série de Fourier qu'on calculera. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

D4.4) *Polynômes de Legendre*. Pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$, Montrer que la famille $(L_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale, avec : $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}.\frac{d^n}{dX^n}((X^2 - 1)^n)$ (Plus généralement, on peut montrer en intégrant par parties que $(L_n|Q) = 0$ pour tout polynôme Q de degré strictement inférieur à n) ; et que la famille $((\sqrt{n + ½}).L_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ est l'orthonormalisée de la base B. Montrer que, si $n \geq 2$: $(n + 1).L_{n+1}(X) - (2n + 1)X.L_n(X) + n.L_{n-1}(X) = 0$ (établir que $(2n + 1)XL_n - (n + 1)L_{n+1}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n). Montrer finalement que L_n vérifie l'équation différentielle : $(X^2 - 1).L''_n(X) + 2X.L'_n(X) - n(n + 1).L_n(X) = 0$ (appliquer la formule de Leibniz à : $((X^2 - 1)((X^2 - 1)^n)')^{(n+1)}$, et à : $(n(X^2 - 1)'(X^2 - 1)^n)^{(n+1)}$).

D4.5) Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni de la base orthonormale $B = (e_1, e_2, e_3)$; trouver trois droites D_1, D_2, D_3 telles que $Vect(e_1)$ soit bissectrice de (D_2, D_3), $Vect(e_2)$ soit bissectrice de (D_1, D_3), et $Vect(e_3)$ soit bissectrice de (D_1, D_2).