

E1) TD : Fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n (première partie).

E1.1) Étant donnés deux ensembles de réels A et B , montrer que $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$. (Double inégalité).

- *Corrigé* : $A \cup B$ contient tous les éléments de A ainsi que d'autres ($A \subset A \cup B$), donc : $\sup(A \cup B) \geq \sup(A)$. Pour la même raison : $\sup(A \cup B) \geq \sup(B)$, donc : $\sup(A \cup B) \geq \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$. (Dit autrement : Tout majorant de $A \cup B$, dont $\sup(A \cup B)$, est majorant de A donc supérieur au plus petit majorant de A , à savoir $\sup(A)$; idem pour B).

Supposons que $\sup\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(A)$, ce qui signifie que : $\forall x \in B, x \leq \sup(B) \leq \sup(A)$. Et comme en plus : $\forall x \in A, x \leq \sup(A)$, alors : $\forall x \in A$ ou $\forall x \in B, x \leq \sup(A)$. Ainsi $\sup(A)$ est un majorant de $A \cup B$; $\sup(A \cup B)$ étant le plus petit majorant de $A \cup B$, alors $\sup(A \cup B) \leq \sup(A) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$. La démonstration étant la même si $\sup\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(B)$, on en déduit : $\sup(A \cup B) \leq \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$.

Comme il y a inégalité dans les deux sens, alors : $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$.

E1.2) Soit E un espace euclidien non réduit à $\{0_E\}$. Montrer que : $[0, +\infty[$

- *Corrigé* : Soit u un vecteur non nul de E ; on pose alors $x = \lambda.u$ avec $\lambda \geq 0$, ce qui signifie que $\|x\| = \lambda.\|u\|$. Et comme : $[0, +\infty[\supset \{\|x\|, x \in E\} \supset \{\|x\|, x = \lambda.u, \lambda \geq 0\} = \{\lambda.\|u\|, \lambda \geq 0\} = [0, +\infty[$, alors :

$$\{\|x\|, x \in E\} = [0, +\infty[.$$

E1.3) Soit $S = S(\omega, r)$ la sphère de centre ω et de rayon r , et a un point donné de S ; montrer qu'il existe un unique point b de S tel que $d(a, b) = 2r$ (le segment $[ab]$ est un diamètre de S).

- *Corrigé* : Déjà : $\forall x \in S, d(a, x) \leq d(a, \omega) + d(\omega, x) = 2r$. Existe-t-il un ou plusieurs points pour lesquels c'est égal ?

Soit $b = 2\omega - a$, alors : $b - \omega = \omega - a$, donc : $d(\omega, b) = \|b - \omega\| = \|\omega - a\| = r$, b est bien un point de S . Par ailleurs : $d(a, b) = \|b - a\| = \|(b - \omega) + (\omega - a)\| = \|2(\omega - a)\| = 2.\|\omega - a\| = 2r$; b est donc un point de S qui vérifie $d(a, b) = 2r$.

Soit b' un autre point de S vérifiant aussi $d(a, b') = 2r$; alors :

• Si on n'utilise pas le résultat du D1.1 :

$4r^2 = \|b' - a\|^2 = (b' - a)^2 = ((b' - \omega) + (\omega - a))^2 = (b' - \omega)^2 + (\omega - a)^2 + 2.(b' - \omega)(\omega - a) = 2r^2 + 2.(b' - \omega)(\omega - a)$, d'où : $(b' - \omega)(\omega - a) = r^2 = \|b' - \omega\|.\|\omega - a\|.\cos(b' - \omega, \omega - a)$. Il s'en suit que : $\cos(b' - \omega, \omega - a) = 1$, donc $b' - \omega$ et $\omega - a$ sont colinéaires et de même sens, d'où : $b' - \omega = \omega - a = b - \omega$, et ainsi : $b' = b$.

• Si on utilise le résultat du D1.1 :

$2r = \|b' - a\| = \|b' - \omega + \omega - a\| \leq \|b' - \omega\| + \|\omega - a\| = 2r$. Or, il ne peut y avoir égalité que si les vecteurs $b' - \omega$ et $\omega - a$ sont colinéaires et de même sens ; il existe donc $\alpha \geq 0$ tel que $b' - \omega = \alpha.(\omega - a)$. En appliquant la norme à cette égalité on obtient $\alpha = 1$, puis : $b' - \omega = \omega - a$, d'où : $b' = 2\omega - a$.

E1.4) Dans $E = \mathbb{R}^2$, étudier la suite définie par : $0 < x_0 < y_0$ et $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}}, \sqrt{x_n y_n}\right)$.

- *Corrigé* : On montre d'abord par récurrence que tous les termes des deux suites sont strictement positifs, ce qui est très simple.

On calcule ensuite : $y_{n+1} - x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} - \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} = \frac{\sqrt{x_n y_n}}{x_n + y_n} (x_n + y_n - 2\sqrt{x_n y_n}) = \frac{\sqrt{x_n y_n}}{x_n + y_n} (\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n})^2 \geq 0$. Il s'en suit qu'à partir du rang 1 la suite (y_n) majore la suite (x_n) , mais comme le rang 0 est acquis par hypothèse :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x_n \leq y_n.$$

Puis : $x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} - x_n = \frac{x_n(y_n - x_n)}{x_n + y_n} \geq 0$, donc la suite (x_n) est croissante.

De même : $y_{n+1} - y_n = \sqrt{x_n y_n} - y_n = \sqrt{y_n}(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}) \leq 0$, donc la suite (y_n) est décroissante.

On peut montrer simplement par récurrence que y_0 est un majorant de (x_n) et que (x_0) est un minorant de (y_n) (il n'est pas convenable d'utiliser des majorants ou minorants qui dépendent de n ; en effet : la suite $(u_n = n)$ est croissante et majorée au rang n par $n+1$, mais elle diverge). Ainsi, (x_n) étant croissante et majorée, (y_n) étant décroissante et minorée, elles convergent vers les limites respectives a et b .

La fonction définissant les récurrences de (x_n) et (y_n) étant continue, on peut lui appliquer la limite quand n tend vers l'infini : $f(x, y) = \left(\frac{2xy}{x+y}, \sqrt{xy}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[^2$, donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n)$. Par suite, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, alors : $f(a, b) = (a, b)$, donc :

$$\left(\frac{2ab}{a+b}, \sqrt{ab}\right) = (a, b), \text{ d'où l'on déduit facilement que } a = b.$$

Les deux suites ayant même limite, et toutes les autres conditions étant vérifiées, ce sont des suites adjacentes.

E1.5) x étant un réel donné, étudier la suite définie par : $Q_n(x) = n^2 x(1 - nx)$ pour n tel que $x \in [0, 1/n]$, et $Q_n(x) = 0$ sinon : Montrer que Q_n est continue, qu'elle admet un maximum, et que l'aire comprise entre la courbe de Q_n et l'axe des abscisses est constante. Déterminer la fonction h qui à tout réel x de $[0, 1]$ associe la limite de $(Q_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit E l'ensemble des fonctions définies sur $[0, 1]$, muni de la norme intégrale : $\|f\|^2 = \int_0^1 f(t)^2 dt$. On considère la suite de fonctions précédente (Q_n) , que l'on restreint à $[0, 1]$. Montrer que (Q_n) diverge.

- *Corrigé* : • Les termes de cette suite sont des fonctions continues car les trois morceaux se recollent bien :

$$Q_n(x) = 0 \text{ pour } x < 0, \quad Q_n(0) = 0, \quad Q_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ sur } [0, \frac{1}{n}], \quad Q(\frac{1}{n}) = 0, \quad Q_n(x) = 0 \text{ pour } x > \frac{1}{n}.$$

Sur $]0, \frac{1}{n}[$: $Q'_n(x) = n^2(1 - 2nx)$ donc Q_n admet un maximum pour $x = 1/2n$, valant $Q_n(1/2n) = n/4$.

L'aire délimitée par le pic de Q_n vaut : $\int_0^{1/n} n^2 x(1 - nx) dx = \dots = \frac{1}{6}$; cette aire est constante.

Soit $x \in [0, 1]$ fixé ; si $x = 0$ alors $(Q_n(x))$ est la suite constante nulle.

Si $x \neq 0$, alors il existe un entier naturel non nul N tel que $1/N \leq x$; par suite, pour $n \geq N$: $Q_n(x) = 0$. La suite $(Q_n(x))$ est nulle à partir d'un certain rang, c'est une suite stationnaire.

Dans tous les cas la limite de $(Q_n(x))$ est nulle, la fonction h est donc la fonction nulle.

• On suppose que (Q_n) converge vers une fonction f , alors $\|Q_n\|^2$ converge vers $\|f\|^2$, donc :

$\int_0^1 f(t)^2 dt = \int_0^1 Q_n(t)^2 dt = \int_0^{1/n} n^4 t^2 (1 - nt)^2 dx = \dots = \frac{n}{30}$; la suite des normes divergeant, la suite (Q_n) diverge. (Voilà donc une suite de fonction qui converge point par point, mais qui diverge en tant que suite de fonctions).

E1.6) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|+1} & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{E(x)(x - E(x))} & \text{sinon} \end{cases}$ (où $E(x)$ désigne la partie entière de x).

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(x + n)$, converge vers 0, et que, cependant, f n'admet pas de limite en $+\infty$.

- *Corrigé* : Si $x \in \mathbb{Z}$, $u_n = \frac{1}{|x+n|+1}$ dont il est évident que la limite est nulle. Si $x \notin \mathbb{Z}$, soit $t = x - E(x)$, où l'on a donc : $t \in]0, 1[$. Ainsi : $u_n = \frac{1}{(E(x)+n)t}$ dont il est tout aussi évident que la limite est nulle.

Supposons que f admette une limite a finie en $+\infty$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, x > M \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$. On pose $k = E(M) + 1$.

Soit $x_n = k + \frac{1}{n}$, alors, d'après ce qui précède : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $|f(x_n) - a| = \left| \frac{n}{k} - a \right| < \varepsilon$; pour $n = k.(E(a) + 1 + m)$, on obtient : $m + (E(a) + 1 - a) < \varepsilon$ pour tout entier naturel m , ce qui est absurde. On en conclut que f n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

Supposons alors que f admette une limite infinie, nécessairement $+\infty$ car f est positive :

$\forall A > 0$, $\exists M > 0$, $x > M \Rightarrow f(x) > A$. Donc, tous les termes de la suite $(u_n = f(n))$ tels que $n > M$ sont minorés par A , ce qui est en contradiction avec le fait qu'elle doit converger vers 0 . Il s'en suit que f n'admet pas non plus de limite infinie ; f n'admet aucune sorte de limite en $+\infty$.