

E2) TD : Fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n (deuxième partie).

E2.1) La fonction définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0\}$ par : $f(x, y) = (1 + x^2 + y^2) \cdot \sin(y)/y$ admet-elle une limite en $(0, 0)$? Si oui, laquelle ?

- *Corrigé* : La fonction f est produit de deux fonctions, $f(x, y) = g(x, y) \cdot h(y)$ où $g(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ est continue sur \mathbb{R}^2 , et $h(y) = \sin(y)/y$ est au départ continue sur \mathbb{R}^* , mais peut être prolongée à \mathbb{R} en posant $h(0) = 1$. Ainsi f étant produit de deux fonctions admettant une limite en $(0, 0)$, elle en admet elle-même une :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \left(\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) \right) \cdot \left(\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} h(y) \right) = 1.$$

E2.2) La fonction définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \neq |y|\}$ par : $f(x, y) = (1 + x + y)/(x^2 - y^2)$ admet-elle une limite en $(0, 0)$? Si oui, laquelle ?

- *Corrigé* : ① Solution préconisée : $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (1 + x + y) = 1$; $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ |x| < |y|}} \frac{1}{x^2 - y^2} = -\infty$, $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ |x| > |y|}} \frac{1}{x^2 - y^2} = +\infty$. Par produit, il y a deux limites éventuelles, ce qui n'est pas possible. Donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

② Solution utilisant les ε : Il faut trouver un ε qui ne marche pas, et ceci pour toutes les valeurs de η possibles.

$\|(x, y)\| < \eta \Rightarrow |x| < \eta$ et $|y| < \eta$; donc $0 \leq x^2 < \eta^2$ et $0 \leq y^2 < \eta^2$. Par suite : $-2\eta^2 < x^2 - y^2 < 2\eta^2$, et alors :

$$\frac{1}{x^2 - y^2} < \frac{-1}{2\eta^2} \text{ ou } \frac{1}{x^2 - y^2} > \frac{1}{2\eta^2}.$$

Quel que soit η il existe des couples (x, y) tels que : $\|(x, y)\| < 1$, et pour ceux-là : $\frac{1}{x^2 - y^2} < \frac{-1}{2}$ ou $\frac{1}{x^2 - y^2} > \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, si on choisit $\varepsilon = 1/4$, il n'existe pas d' η qui permettraient d'avoir une limite finie.

Il ne reste plus qu'à constater que pour $|x| < |y|$ alors l'inégalité valide sera la première : $\frac{1}{x^2 - y^2} < \frac{-1}{2\eta^2}$, ce qui aura pour conséquence que la limite sera $-\infty$, et pour $|x| > |y|$ c'est le contraire, à savoir $+\infty$.

- *Conclusion* : Comme il ne peut pas y avoir deux limites distinctes, il n'y en a pas du tout.

E2.3) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot \sin(1/(x^2 + y^2))$, et $f(0, 0) = 0$, est-elle continue en 0 ? Est-elle de classe C^1 ?

- *Corrigé* : On considère f comme la composée de deux fonction, $g(x, y) = x^2 + y^2$, qui est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 , et $h(X) = X \cdot \sin(1/X)$ pour $X \neq 0$, et $h(0) = 0$, qui est continue sur \mathbb{R} . Alors : $f = h \circ g$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

On calcule ensuite les dérivées partielle de f , pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right).$$

Ces dérivées partielles ne sont pas bornées au voisinage de $(0, 0)$. En effet, soit, par exemple :

$$x = y = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \text{ alors : } \frac{1}{x^2 + y^2} = 2n\pi, \text{ d'où : } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2\sqrt{n\pi}.$$

Quand n devient grand, x et y deviennent bien voisins de 0, tandis que les dérivées partielles deviennent infiniment grandes ; f n'est donc pas de classe C^1 . En fait elle est quand même de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

E2.4) L'application définie sur \mathbb{R}^3 par $f(x, y, z) = (x + y^2, xy^2z)$ est-elle de classe C^1 ? Si oui, donner sa matrice jacobienne. L'application définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 par $g(x, y) = (x^2 + y, xy, e^y)$ est-elle de classe C^1 ? Si oui, donner sa matrice jacobienne. Donner la matrice jacobienne de $g \circ f$ de deux façons différentes : a) par calcul direct ; b) en utilisant la formule de composition.

- *Corrigé* : f est de classe C^1 si les six dérivées partielles le sont, ce qui est le cas :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = y^2z, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = 2xyz, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = xy^2.$$

On les réunit dans la matrice jacobienne : $J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow J_f[(x, y, z)] = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix}.$

De même, g est de classe C^1 si les six dérivées partielles le sont, ce qui est le cas :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) = x, \quad \frac{\partial g_3}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial g_3}{\partial y}(x, y) = e^y.$$

On les réunit dans la matrice jacobienne : $J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow J_g[(x, y)] = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y & x \\ 0 & e^y \end{pmatrix}.$

• a) $g \circ f(x, y, z) = g(x + y^2, xy^2z) = (x^2 + 2xy^2 + y^4 + xy^2z, x^2y^2z + xy^4z, e^{xy^2z})$, d'où :

$$J_{g \circ f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial x} & \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial y} & \frac{\partial(g \circ f)_1}{\partial z} \\ \frac{\partial(g \circ f)_2}{\partial x} & \frac{\partial(g \circ f)_2}{\partial y} & \frac{\partial(g \circ f)_2}{\partial z} \\ \frac{\partial(g \circ f)_3}{\partial x} & \frac{\partial(g \circ f)_3}{\partial y} & \frac{\partial(g \circ f)_3}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow J_{g \circ f}[(x, y, z)] = \begin{pmatrix} 2x + 2y^2 + y^2z & 4xy + 4y^3 + 2xyz & xy^2 \\ 2xy^2z + y^4z & 2x^2yz + 4xy^3z & x^2y^2 + xy^4 \\ y^2z \cdot e^{xy^2z} & 2xyz \cdot e^{xy^2z} & xy^2 \cdot e^{xy^2z} \end{pmatrix}.$$

b) $J_{g \circ f}[(x, y, z)] = J_g[(x + y^2, xy^2z)] \times J_f[(x, y, z)] =$

$$\begin{pmatrix} 2x + 2y^2 & 1 \\ xy^2z & x + y^2 \\ 0 & e^{xy^2z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y^2 + y^2z & 4xy + 4y^3 + 2xyz & xy^2 \\ 2xy^2z + y^4z & 2x^2yz + 4xy^3z & x^2y^2 + xy^4 \\ y^2z \cdot e^{xy^2z} & 2xyz \cdot e^{xy^2z} & xy^2 \cdot e^{xy^2z} \end{pmatrix}.$$

E2.5) Donner les dérivées partielles secondes de f définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0\}$ par : $f(x, y) = \text{Arctan}(x/y)$.

Cette fonction vérifie-t-elle : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ (fonction harmonique) ?

- *Corrigé* : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-2xy}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

C'est bien une fonction harmonique car : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$.