E4) TD : Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ (quatrième partie).

E4.1) Soit f, g et h les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, définies par :

$f(t) = (t^3, t - 1, t + 1)$, $g(t) = (t^2 + 4, 2t - t^2, 2t + t^2)$.

Calculer : $(f(t)\wedge g(t))^{(3)}$ et $(f(t)|g(t))^{(2)}$ en utilisant les formules de Leibniz.

- *Corrigé* : $(f(t)\wedge g(t))^{(3)} = f(t)^{(3)}\wedge g(t)^{(0)} + 3.f(t)^{(2)}\wedge g(t)^{(1)} + 3.f(t)^{(1)}\wedge g(t)^{(2)} + f(t)^{(0)}\wedge g(t)^{(3)} =$

$(6, 0, 0)\wedge(t^2 + 4, 2t - t^2, 2t + t^2) + 3.(6t, 0, 0)\wedge(2t, 2 - 2t, 2 + 2t) + 3.(3t^2, 1, 1)\wedge(2, -2, 2) + (t^3, t - 1, t + 1)\wedge(0, 0, 0) =$

$(0, -12t - 12t^2, 12t - 12t^2) + (0, -36t - 36t^2, 36t - 36t^2) + (12, 6 - 18t^2, -6 - 18t^2) + (0, 0, 0) =$

$(f(t)\wedge g(t))^{(3)} = (12, 6 - 48t - 60t^2, -6 + 48t - 60t^2)$.

$(f(t)|g(t))^{(2)} = (f''(t)|g(t)) + 2.(f'(t)|g'(t)) + (f(t)|g''(t)) =$

$((6t, 0, 0)|(t^2 + 4, 2t - t^2, 2t + t^2)) + 2.((3t^2, 1, 1)|(2t, 2 - 2t, 2 + 2t)) + ((t^3, t - 1, t + 1)|(2, -2, 2)) =$

$6t^3 + 24t + 12t^3 + 4 - 4t + 4 + 4t + 2t^3 - 2t + 2 + 2t + 2 = (f(t)|g(t))^{(2)} = 20t^3 + 24t + 12$.

E4.2) Déterminer s'ils existent, les extremums des fonctions : *a*) $f(x, y) = x^3 - y^2 - x$; *b*) $f(x, y) = x.e^y + y.e^x$; *c*) $f(x, y, z) = x^2/2 + xyz + y - z$ (écrire la formule de Taylor à l'ordre deux).

- *Corrigé* : *a*) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$; il y a donc deux points critiques $(\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, 0)$. Déterminons leur nature : $R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x$, $S = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) = 0$, $T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2$; $\Delta = S^2 - RT = 12x$, ici : $\Delta = \pm 4\sqrt{3}$.

Conclusion : Seul le point $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0)$ est un extremum, un maximum car $R < 0$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y + y.e^x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x.e^y + e^x$; il y a donc un système à résoudre : $e^y = -y.e^x$, $x.(-y.e^x) + e^x = 0$, d'où : $xy = 1$, $x.e^{1/x} + e^x = 0$.

Soit $g(x) = x.e^{1/x} + e^x$; elle ne peut s'annuler que pour $x < 0$: $g'(x) = (1 - 1/x).e^{1/x} + e^x > 0$ pour $x < 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]-\infty, 0[$, avec $g(-1) = 0$, qui est ainsi son unique annulation.

Il y a un unique point critique $(-1,-1)$ dont il faut déterminer la nature :

$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y.e^x$, $S = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y) = e^y + e^x$, $T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x.e^y$, d'où : $\Delta = S^2 - RT = e^{2x} + e^{2y} + (2 - xy).e^{x+y}$;

ici : $\Delta = 3/e^2 > 0$, il n'y a donc pas d'extremum.

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = x + yz$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz + 1$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy - 1$. Il y a donc un système à résoudre :

$(2) + (3)$: $x(y + z) = 0$,mais $x \neq 0$ sinon $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y, z) = 1 \neq 0$; donc : $z = -y$, qu'on remplace :

$x - y^2 = 0$, donc $x = y^2$, et ainsi : $xy = y^3 = 1$. En en déduit : $x = y = 1$ et $z = -1$, c'est-à-dire le point $(1, 1, -1)$.

On calcule ensuite les six dérivées partielles secondes pour écrire la formule de Taylor :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y, z) = z$ (ici : -1), $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x, y, z) = y$ (ici : 1), $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x, y, z) = x$ (ici : 1), d'où : $f(1 + h_1, 1 + h_2, -1 + h_3) - f(1, 1, -1) = .\frac{1}{2}h_1^2 - h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3 + o(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$.

Le signe n'est pas constant (par exemple : $h_2 = h_3 = 0 \rightarrow +$; $h_1 = 0$, h_2 et h_3 de signes contraires $\rightarrow -$), ce n'est donc pas un extremum.

E4.3) Trouver un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle (par exemple, le cercle trigonométrique). Donner deux solutions du problème, une utilisant les angles et l'autre non.

- *Corrigé* : On fixe le centre du cercle à l'origine, et son rayon égal à 1, car les autres solutions sont obtenues en appliquant une simple homothétie. On fixe le premier point $A:(1, 0)$ car les autres solutions sont obtenues en appliquant une simple rotation (homothétie et rotation $\rightarrow$ similitude).

• *Avec les angles* : Soit $B:(\cos(u), \sin(u))$ et $C:(\cos(v), \sin(v))$ les deux autres points. L'aire d'un triangle peut être calculée avec un déterminant, par exemple : $\frac{1}{2}.|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}.|\cos(u)\sin(v) - \sin(u)\cos(v) + \sin(u) - \sin(v)|$.

Le couple (u, v) cherché est donc un extremum de $f(u, v) = \sin(v - u) + \sin(u) - \sin(v)$. On calcule donc :

$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = -\cos(u - v) + \cos(u)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \cos(u - v) - \cos(v)$; les points critiques vérifient donc :

$\cos(u) = \cos(v) = \cos(u - v)$; donc : $v = \pm u + 2k\pi$, $\cos(u - (\pm u + 2k\pi)) = \cos(u)$, c'est-à-dire : $\cos(u) = 1$ ou $\cos(u) = \cos(2u)$, à savoir : $u = 2k\pi$ ou $2u = \pm u + 2k\pi$, ou encore : $u = 2k\pi/3$.

Comme il est exclu que $u = 2k\pi$ où le triangle serait plat et d'aire nulle, alors $u = \pm 2\pi/3$; par symétrie selon l'axe des abscisses, on peut fixer $u = 2\pi/3$. Auquel cas $v = -2\pi/3$, et le triangle ABC est équilatéral.

On peut vérifier par acquis de conscience que c'est bien un extremum :

$R = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) = \sin(u - v) - \sin(u)$, $S = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) = \sin(v - u)$, $T = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v) = \sin(u - v) + \sin(v)$,

$\Delta = S^2 - RT = ... = -9/4 < 0$, c'est bien un extremum.

Conclusion : Les triangles d'aires maximales sont équilatéraux.

• *Sans les angles* : Soit $B:(u, \sqrt{1 - u^2})$, $c:(v, -\sqrt{1 - v^2})$ car on se permet de supposer que les points considérés ne sont pas du même côté de l'axe des abscisses.

$\frac{1}{2}.|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}.|(1 - u)\sqrt{1 - v^2} + (1 - v)\sqrt{1 - u^2}|$. on cherche donc les extremums de

$f(u, v) = (1 - u)\sqrt{1 - v^2} + (1 - v)\sqrt{1 - u^2}$.

$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = -\sqrt{1 - v^2} - (1 - v)u/\sqrt{1 - u^2}$, $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = -\sqrt{1 - u^2} - (1 - u)v/\sqrt{1 - v^2}$. Les points critiques vérifient donc :

$(v - 1)u = (u - 1)v = \sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - v^2}$, d'où : $u = v$ et $(u - 1)u = 1 - u^2$; donc : $2u^2 - u - 1 = (2u + 1)(u - 1) = 0$. On en déduit : $u = v = -\frac{1}{2}$ (car si $u = v = 1$ les trois points sont confondus avec A).

Les points solutions sont donc $A:(1, 0)$, $B:(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C:(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, ce qui forme un triangle équilatéral. Il reste à vérifier que c'est bien un extremum en calculant :

$R = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) = \frac{1 - v}{(1 - u^2)^{3/2}}$, $S = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} + \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}$, $T = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v) = \frac{1 - u}{(1 - v^2)^{3/2}}$,

$\Delta = S^2 - RT = (-2/\sqrt{3})^2 - (4/\sqrt{3})(4/\sqrt{3}) = -4 < 0$ donc OK.

E4.4) Soit f de classe C^2 définie sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et g de classe C^2 définie sur $B = \{(\rho, \theta),\ \rho > 0 \text{ et } |\theta| < \pi/2\}$ par : $g(\rho, \theta) = f(x, y)$. *a*) Exprimer $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en fonction de f (et ses dérivées partielles), ρ et θ. *b*) Idem avec x et y. *c*) Trouver f telle que : $y^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x.\frac{\partial f}{\partial x} + y.\frac{\partial f}{\partial y} - f$.

- *Corrigé* : *a*) $g(\rho, \theta) = f(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta))$, donc, en notant $u(\rho, \theta) = (\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta))$, on peut écrire $g = f\circ u$ et appliquer la formule de composition, par exemple sur les matrices jacobiennes. On obtient ainsi :

$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = -\rho.\sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) + \rho.\cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta))$, et alors :

$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) = -\rho.\cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) - \rho.\sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) +$

$$-\rho.\sin(\theta).\frac{\partial}{\partial\theta}.\frac{\partial f}{\partial x}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) + \rho.\cos(\theta).\frac{\partial}{\partial\theta}.\frac{\partial f}{\partial y}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) =$$

$$-\rho.\cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) - \rho.\sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) - \rho.\sin(\theta).\frac{\partial}{\partial x}.\frac{\partial g}{\partial\theta}(\rho, \theta) + \rho.\cos(\theta).\frac{\partial}{\partial y}.\frac{\partial g}{\partial\theta}(\rho, \theta) =$$

$$-\rho.\cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) - \rho.\sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) +$$

$$- \rho.\sin(\theta).\frac{\partial}{\partial x}.(-\rho.\sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) + \rho.\cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta))) +$$

$$\rho.\cos(\theta).\frac{\partial}{\partial y}.(-\rho.\sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) + \rho.\cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta))) =$$

$$-\rho.\cos(\theta).\frac{\partial f}{\partial x}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) - \rho.\sin(\theta).\frac{\partial f}{\partial y}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) +$$

$$\rho^2.\sin^2(\theta).\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) + \rho^2.\cos^2(\theta).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) - 2\rho^2.\sin(\theta)\cos(\theta).\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta)) =$$

b) $\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(\rho, \theta) = -x.\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y.\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + y^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + x^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - 2xy.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y)$.

- *Remarque* : $\frac{\partial g}{\partial\theta}(\rho, \theta) = -y.\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x.\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

c) L'équation donnée en exemple final est donc identique à : $g(\rho, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(\rho, \theta) = 0$; qu'on sait résoudre :

$g(\rho, \theta) = a(\rho).\cos(\theta) + b(\rho).\sin(\theta) = a(\rho).x/\rho + b(\rho).y/\rho$. Comme $a(\rho)/\rho$ et $b(\rho)/\rho$ sont des fonctions de ρ, soit λ telle que $\lambda(\rho) = a(\sqrt{\rho})/\sqrt{\rho}$ et $\mu(\rho) = b(\sqrt{\rho})/\sqrt{\rho}$ car alors $a(\rho)/\rho = \lambda(\rho^2) = \lambda(x^2 + y^2)$ et $b(\rho)/\rho = \mu(x^2 + y^2)$. Ainsi, la solution est : $f(x, y) = \lambda(x^2 + y^2).x + \mu(x^2 + y^2).y$, où λ et μ sont des fonctions de classe C^2 (on peut vérifier qu'une telle fonction remplit la condition souhaitée sans autre restriction sur le choix de λ et μ).