EXOS TECHNIQUES N°3 – Dérivation de Scalaires / Vecteurs

<u>Objectifs :</u> → Savoir dériver des scalaires et des vecteurs (base cartésienne et polaire/cylindrique)

<u>A travailler :</u> → Vitesse d'exécution (les refaire des dizaines de fois pour accélérer)
→ Aisance…

Exo 1 : Dériver un scalaire ou une fonction scalaire

$$f(t)=\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha t,\quad \alpha\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha t^2,\quad \alpha\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha t^n,\quad \alpha\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha t+\beta,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha\cos(\omega t),\quad \alpha,\omega\in\mathbb{R}\Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha\sin(\omega t),\quad \alpha,\omega\in\mathbb{R}\Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha\sin\left(\omega(t-t_0)\right),\quad \alpha,\omega,t_0\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha\ln(t/\tau),\quad \alpha,\tau\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha\ln\left((t-t_0)/\tau\right),\quad \alpha,\tau,t_0\in\mathbb{R}\Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha\cdot e^{(t/\tau)},\quad \alpha,\tau\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha\cdot e^{(-(t-t_0)/\tau)},\quad \alpha,\tau,t_0\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha\sqrt{\beta t},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow \dot{f}(t)=$$
$$f(t)=\alpha\cos(\omega t)e^{(-t/\tau)},\quad \alpha,\tau,\omega\in\mathbb{R}\Rightarrow \dot{f}(t)=$$

Exo 2 : Dériver un vecteur en cartésienne

$$Position\ \vec{r}=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}_{CART}\quad \Rightarrow vitesse\ \vec{v}=\begin{bmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{bmatrix}_{CART}\quad \Rightarrow accél\ \vec{a}=\begin{bmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{bmatrix}_{CART}$$

Ex 1 : $$\vec{r_1}=\begin{bmatrix}\alpha t\\\beta\\0\end{bmatrix}_{CART},\alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow\quad \vec{v}=\begin{bmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{bmatrix}_{CART}\quad \Rightarrow\quad \vec{a}=\begin{bmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{bmatrix}_{CART}$$

Ex 2 : $$\vec{r_2}=\begin{bmatrix}\alpha\cos(\omega t)\\\beta t^2+\gamma t\\\ln(\gamma t)\end{bmatrix}_{CART},\alpha,\beta,\omega,\gamma\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow\quad \vec{v}=\begin{bmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{bmatrix}_{CART}\quad \Rightarrow\quad \vec{a}=\begin{bmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{bmatrix}_{CART}$$

Ex 3 : $$\vec{r_3}=\begin{bmatrix}\alpha\cos\left(\omega(t-t_0)\right)\\57t\\\alpha\sqrt{t-t_0}\end{bmatrix}_{CART},\alpha,\omega,t_0\in\mathbb{R}\quad \Rightarrow\quad \vec{v}=\begin{bmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{bmatrix}_{CART}\quad \Rightarrow\quad \vec{a}=\begin{bmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{bmatrix}_{CART}$$

Exo 3 : Dériver un vecteur en polaire (2D) ou cylindrique (3D)

On travaille pour toute cette partie dans un référentiel $\Re = \left(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, t\right)$

Mais avec les coordonnées cylindriques (r,θ,z) de la base cylindrique $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}\right)$:

La clé : $\left.\dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_{\Re} =$ et $\left.\dfrac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right)_{\Re} =$

Position : $\vec{r} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow vitesse\ \vec{v} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow accél\ \vec{a} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 1 : $\vec{r_1} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \theta = cstte \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 2 : $\vec{r_2} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \theta = \omega_0 t, \omega_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 3 : $\vec{r_3} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \theta = \alpha t^2, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 4 : $\vec{r_4} = \begin{bmatrix} R\omega_0 t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \omega_0 = \dfrac{d\theta}{dt} \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 5 : $\vec{r_5} = \begin{bmatrix} \alpha t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \alpha \in \mathbb{R}, \theta = cstte \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 6 : $\vec{r_6} = \begin{bmatrix} R \\ \alpha t \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \alpha, \omega_0 = \dfrac{d\theta}{dt} \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 7 : $\vec{r_7} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}^{\omega_0 t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \omega_0 = \dfrac{d\theta}{dt} \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 8 : $\vec{r_8} = \begin{bmatrix} R\cos(\omega_0 t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, R, \omega_0 = \dfrac{d\theta}{dt} \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 9 : $\vec{r_9} = \begin{bmatrix} \mathrm{R}_0 + v_0 t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, R_0, v_0, \omega_0 = \dfrac{d\theta}{dt} \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{POL}$