

CORRIGE – ExoTech3 – Dérivation de Scalaires / Vecteurs

- Objectifs :** → Savoir dériver des scalaires et des vecteurs (base cartésienne et polaire/cylindrique)
- A travailler :** → Vitesse d'exécution (les refaire des dizaines de fois pour accélérer)
→ Aisance...

Exo 1 : Dériver un scalaire ou une fonction scalaire

$$f(t) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = 0$$

$$f(t) = \alpha t, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = \alpha$$

$$f(t) = \alpha t^2, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = 2\alpha t$$

$$f(t) = \alpha t^n, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = n\alpha t^{n-1}$$

$$f(t) = \alpha t + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = \alpha$$

$$f(t) = \alpha \cos(\omega t), \quad \alpha, \omega \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = -\alpha \omega \sin(\omega t)$$

$$f(t) = \alpha \sin(\omega t), \quad \alpha, \omega \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = \alpha \omega \cos(\omega t)$$

$$f(t) = \alpha \sin(\omega(t-t_0)), \quad \alpha, \omega, t_0 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = \alpha \omega \cos(\omega t)$$

$$f(t) = \alpha \ln(t/\tau), \quad \alpha, \tau \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = \frac{\alpha}{\tau(t/\tau)} = \frac{\alpha}{t}$$

$$f(t) = \alpha \ln((t-t_0)/\tau), \quad \alpha, \tau, t_0 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = \frac{\alpha}{t-t_0}$$

$$f(t) = \alpha \cdot e^{(t/\tau)}, \quad \alpha, \tau \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = \frac{\alpha}{\tau} e^{(t/\tau)}$$

$$f(t) = \alpha \cdot e^{-(t-t_0)/\tau}, \quad \alpha, \tau, t_0 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = \frac{-\alpha}{\tau} e^{-(t-t_0)/\tau}$$

$$f(t) = \alpha \sqrt{\beta t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = \frac{\alpha \sqrt{\beta}}{2\sqrt{t}} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\beta}{t}}$$

$$f(t) = \alpha \cos(\omega t) e^{(-t/\tau)}, \quad \alpha, \tau, \omega \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \dot{f}(t) = \left[-\alpha \omega \sin(\omega t) - \frac{\alpha}{\tau} \cos(\omega t) \right] e^{(-t/\tau)}$$

Exo 2 : Dériver un vecteur en cartésienne

$$\text{Position } \vec{r} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{\text{CART}} \quad \Rightarrow \text{vitesse } \vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}_{\text{CART}} \quad \Rightarrow \text{accél } \vec{a} = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix}_{\text{CART}}$$

$$\text{Ex 1 : } \vec{r}_1 = \begin{bmatrix} \alpha t \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{CART}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{CART}} \quad \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{CART}}$$

$$\text{Ex 2 : } \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \cos(\omega t) \\ \beta t^2 + \gamma t \\ \ln(\gamma t) \end{bmatrix}_{\text{CART}}, \quad \alpha, \beta, \omega, \gamma \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} -\alpha \omega \sin(\omega t) \\ 2\beta t + \gamma \\ 1/t \end{bmatrix}_{\text{CART}} \quad \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} -\alpha \omega^2 \cos(\omega t) \\ 2\beta \\ -1/t^2 \end{bmatrix}_{\text{CART}}$$

$$\text{Ex 3 : } \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} \alpha \cos(\omega(t-t_0)) \\ 57t \\ \alpha \sqrt{t-t_0} \end{bmatrix}_{\text{CART}}, \quad \alpha, \omega, t_0 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} -\alpha \omega \sin(\omega(t-t_0)) \\ 57 \\ \alpha/2\sqrt{t-t_0} \end{bmatrix}_{\text{CART}} \quad \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} -\alpha \omega^2 \cos(\omega(t-t_0)) \\ 0 \\ -\alpha/4\sqrt{t-t_0} \end{bmatrix}_{\text{CART}}$$

Exo 3 : Dériver un vecteur en polaire (2D) ou cylindrique (3D)

On travaille pour toute cette partie dans un référentiel $\mathfrak{R} = (0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$

Mais avec les coordonnées cylindriques (r, θ, z) de la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

La clé : $\left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_{\mathfrak{R}} = \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta$ et $\left. \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right|_{\mathfrak{R}} = -\dot{\theta} \cdot \vec{e}_r$

Position : $\vec{r} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \text{vitesse } \vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \text{accél} \vec{a} = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 1 : $\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \theta = \text{cste} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 2 : $\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \theta = \omega_0 t, \omega_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ R\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} -R\omega_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 3 : $\vec{r}_3 = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \theta = \alpha t^2, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha t R \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} 2\alpha t R \cdot \dot{\theta} \\ 2\alpha R \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} = \begin{bmatrix} 4\alpha^2 t^2 R \\ 2\alpha R \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 4 : $\vec{r}_4 = \begin{bmatrix} R\omega_0 t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \omega_0 = \frac{d\theta}{dt} \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} R\omega_0 \\ R\omega_0^2 t \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} -R\omega_0^3 t \\ 2R\omega_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 5 : $\vec{r}_5 = \begin{bmatrix} \alpha t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \alpha \in \mathbb{R}, \theta = \text{cste} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 6 : $\vec{r}_6 = \begin{bmatrix} R \\ \alpha t \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \alpha, \omega_0 = \frac{d\theta}{dt} \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} -\alpha\omega_0 t \\ R\omega_0 + \alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} -\alpha\omega_0 - (R\omega_0 + \alpha)\omega_0 \\ -\alpha\omega_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 7 : $\vec{r}_7 = \begin{bmatrix} R e^{\omega_0 t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, \omega_0 = \frac{d\theta}{dt} \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} R\omega_0 e^{\omega_0 t} \\ R\omega_0 e^{\omega_0 t} \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2R\omega_0^2 e^{\omega_0 t} \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 8 : $\vec{r}_8 = \begin{bmatrix} R \cos(\omega_0 t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, R, \omega_0 = \frac{d\theta}{dt} \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} -R\omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ R\omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} -2R\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \\ -2R\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$

Ex 9 : $\vec{r}_9 = \begin{bmatrix} R_0 + v_0 t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}, R_0, v_0, \omega_0 = \frac{d\theta}{dt} \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \omega_0 (R_0 + v_0 t) \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} -(R_0 + v_0 t)\omega_0^2 \\ 2v_0\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$