CORRIGE – ExoTech N°4 – Equa Diff 2nd Ordre

Objectifs : → Savoir résoudre une équation différentielle du 2nd Ordre

A travailler : → Vitesse d'exécution (les refaire des dizaines de fois pour accélérer)
→ Attention aux constantes d'intégration et aux changements d'origine des temps…

Qu 1 : Qu'est-ce que l'équation caractéristique associée à une équation et pourquoi doit-on la résoudre ?

Qu'est-ce ? → Polynôme du 2nd degré obtenu en injectant $f(t)=\lambda e^{r\cdot t}$ dans l'équa diff du 2nd Ordre.

Pourquoi l'injecter ? → On sait que les solutions générales sont du type exponentiel. On cherche donc une solution sous cette forme et on l'injecte pour trouver ces solutions … :

$$r^2\lambda e^{r\cdot t}+2\sigma\omega_0\cdot r\lambda e^{r\cdot t}+\omega_0^2\cdot\lambda e^{r\cdot t}=0 \quad\Leftrightarrow\quad r^2+2\sigma\omega_0\cdot r+\omega_0^2=0$$

Pourquoi la résoudre ? → En obtenant les valeurs r_1 et r_2 solutions de l'équation caractéristiques ($r_1,r_2\in\mathbb{C}$), on en déduit les solutions de l'équa diff : $f(t)=\lambda_1 e^{r_1\cdot t}+\lambda_2 e^{r_2\cdot t},\quad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

Exo 1 : Sans amortissement (détailler les étapes)

On a $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2}+\omega_0^2\cdot u(t)=0$, $\omega_0\in\mathbb{R}^+$, et à $t=0$, $\begin{cases}u(0)=U_0\\ \dot u(0)=0\end{cases}$, Pour $t>0$, calculer $u(t)=$

$$\begin{cases}1\_u^{SSM}(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)\\ 2\_u^{PART}(t)=0\\ 3\_u(t)=u^{SSM}(t)+u^{PART}(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)\\ 4\_CI1\_u(0)=U_0=A\\ \_\_CI2\_\dot u(0)=0=B\omega_0\end{cases}$$

d'où : $\boxed{u(t)=U_0\cos(\omega_0 t)}$

On a $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_0^2\cdot x(t)=0$, $\omega_0\in\mathbb{R}^+$, et à $t=0$, $\begin{cases}x(0)=0\\ \dot x(0)=V_0\end{cases}$, Pour $t>0$, calculer $x(t)=$

$$\begin{cases}1\_x^{SSM}(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)\\ 2\_x^{PART}(t)=0\\ 3\_x(t)=x^{SSM}(t)+x^{PART}(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)\\ 4\_CI1\_x(0)=0=A\\ \_\_CI2\_\dot x(0)=V_0=B\omega_0\end{cases}$$

d'où : $\boxed{x(t)=\dfrac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

On a $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2}+\omega_0^2\cdot u(t)=\psi$, $\omega_0\in\mathbb{R}^+$, et à $t=0$, $\begin{cases}u(0)=0\\ \dot u(0)=0\end{cases}$, Pour $t>0$, calculer $u(t)=$

$$\begin{cases}1\_u^{SSM}(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)\\ 2\_u^{PART}(t)=\dfrac{\psi}{\omega_0^2}\\ 3\_u(t)=u^{SSM}(t)+u^{PART}(t)=\dfrac{\psi}{\omega_0^2}+A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)\\ 4\_CI1\_u(0)=0=\dfrac{\psi}{\omega_0^2}+A\\ \_\_CI2\_\dot u(0)=0=B\omega_0\end{cases}$$

d'où : $\boxed{u(t)=\dfrac{\psi}{\omega_0^2}\left(1-\cos(\omega_0 t)\right)}$

On a $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_0^2\cdot x(t)=0$, $\omega_0\in\mathbb{R}^+$, et à $t=t_0$, $\begin{cases}x(t_0)=X_0\\ \dot{x}(t_0)=0\end{cases}$, Pour $t>t_0$, calculer $x(t)=$

$$\begin{cases}1\_x^{SSM}(t)=A\cos(\omega_0(t-t_0))+B\sin(\omega_0(t-t_0))\\ 2\_x^{PART}(t)=0\\ 3\_x(t)=x^{SSM}(t)+x^{PART}(t)=A\cos(\omega_0(t-t_0))+B\sin(\omega_0(t-t_0))\\ 4\_CI1\_x(t_0)=X_0=A\\ \_\_CI2\_\dot{x}(t_0)=0=B\omega_0\end{cases}$$

d'où : $\boxed{x(t)=X_0\sin(\omega_0(t-t_0))}$

Exo 2 : Autre cas particulier du 2nd Ordre qui n'apparaît pas sur la fiche méthode (détailler les étapes)

On a $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2}-\alpha^2\cdot u(t)=0$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$, et à $t=0$, $\begin{cases}u(0)=U_0\\ \dot{u}(0)=0\end{cases}$, Pour $t>0$, calculer $u(t)=$

$$\begin{cases}1\_u^{SSM}(t)=A\cdot ch(\alpha t)+B\cdot sh(\alpha t)\\ 2\_u^{PART}(t)=0\\ 3\_u(t)=u^{SSM}(t)+u^{PART}(t)=A\cdot ch(\alpha t)+B\cdot sh(\alpha t)\\ 4\_CI1\_u(0)=U_0=A\\ \_\_CI2\_\dot{u}(0)=0=\alpha B\end{cases}$$

d'où : $\boxed{u(t)=U_0\cdot ch(\alpha t)}$

(Utilisation des fonction cosinus et sinus hyperboliques : $\begin{cases}ch(\alpha t)=\dfrac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\\ sh(\alpha t)=\dfrac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\end{cases}$)

On a $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}-\alpha^2\cdot x(t)=0$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$, et à $t=0$, $\begin{cases}x(0)=0\\ \dot{x}(0)=V_0\end{cases}$, Pour $t>0$, calculer $x(t)=$

$$\begin{cases}1\_x^{SSM}(t)=A\cdot ch(\alpha t)+B\cdot sh(\alpha t)\\ 2\_x^{PART}(t)=0\\ 3\_x(t)=x^{SSM}(t)+x^{PART}(t)=A\cdot ch(\alpha t)+B\cdot sh(\alpha t)\\ 4\_CI1\_x(0)=0=A\\ \_\_CI2\_\dot{x}(0)=V_0=\alpha B\end{cases}$$

d'où : $\boxed{x(t)=\dfrac{V_0}{\alpha}\cdot sh(\alpha t)}$

Exo 3 : Avec amortissement (détailler les étapes)

On a $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+2\sigma\omega_0\cdot\dfrac{dx(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot x(t)=0$, avec $\omega_0\in\mathbb{R}^+$, $\sigma>1$ et à $t=0$, $\begin{cases}x(0)=x_0\\ \dot{x}(0)=0\end{cases}$, Pour $t>0$, calculer $x(t)=$

$$\begin{cases}1\_eq\_caract: r^2+2\sigma\omega_0\cdot r+\omega_0^2=0\\ \qquad \Delta=4\omega_0^2(\sigma^2-1)>0\\ \qquad \to \text{2 racines réelles distinctes : } r_{1/2}=\omega_0\left(-\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-1}\right)\\ \qquad x^{SSM}(t)=A\cdot e^{r_1t}+B\cdot e^{r_2t}\\ 2\_x^{PART}(t)=0\\ 3\_x(t)=x^{SSM}(t)+x^{PART}(t)=A\cdot e^{r_1t}+B\cdot e^{r_2t}\\ 4\_CI1\_x(0)=X_0=A+B\\ \qquad CI2\_\dot{x}(0)=0=Ar_1+Br_2\end{cases}$$

d'où : $\begin{cases}B=\dfrac{r_1\cdot X_0}{r_1-r_2}\\ A=\dfrac{-r_2\cdot X_0}{r_1-r_2}\end{cases}$

$\boxed{x(t)=A\cdot e^{r_1t}+B\cdot e^{r_2t}}$

On a $\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\sigma\omega_0\cdot\frac{dx(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot x(t)=0$, avec $\omega_0\in\mathbb{R}^+$, $\sigma=1$ et à $t=0$, $\begin{cases}x(0)=x_0\\ \dot{x}(0)=0\end{cases}$, Pour $t>0$, calculer $x(t)=$

$$\begin{cases}1\_eq\_caract : r^2+2\sigma\omega_0\cdot r+\omega_0^2=0\\ \quad \Delta=4\omega_0^2\left(\sigma^2-1\right)=0\\ \quad \rightarrow\ \text{1 racine double} : r=-\sigma\omega_0\\ \quad x^{SSM}(t)=(At+B)\cdot e^{r_1t}\\ 2\_x^{PART}(t)=0\\ 3\_x(t)=x^{SSM}(t)+x^{PART}(t)=(At+B)\cdot e^{rt}\\ 4\_CI1\_x(0)=X_0=B\\ \quad CI2\_\dot{x}(0)=0=A+Br\end{cases}$$

d'où : $\boxed{x(t)=X_0(1-rt)\cdot e^{rt}}$

On a $\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\sigma\omega_0\cdot\frac{dx(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot x(t)=0$, avec $\omega_0\in\mathbb{R}^+$, $\sigma<1$ et à $t=0$, $\begin{cases}x(0)=x_0\\ \dot{x}(0)=0\end{cases}$, Pour $t>0$, calculer $x(t)=$

$$\begin{cases}1\_eq\_caract : r^2+2\sigma\omega_0\cdot r+\omega_0^2=0\\ \quad \Delta=4\omega_0^2\left(\sigma^2-1\right)=0\\ \quad \rightarrow\ \text{2 racines complexes} : r_{1/2}=-\sigma\omega_0\pm i\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}=-\sigma\omega_0\pm i\omega_P\\ \quad x^{SSM}(t)=e^{-\sigma\omega_0t}\left(A\cos(\omega_Pt)+B\sin(\omega_Pt)\right)\\ 2\_x^{PART}(t)=0\\ 3\_x(t)=x^{SSM}(t)+x^{PART}(t)=e^{-\sigma\omega_0t}\left(A\cos(\omega_Pt)+B\sin(\omega_Pt)\right)\\ 4\_CI1\_x(0)=X_0=A\\ \quad CI2\_\dot{x}(0)=0=-\sigma\omega_0A+\omega_PB\end{cases}$$

On obtient alors : $\begin{cases}A=X_0\\ B=\frac{\sigma\omega_0A}{\omega_P}=\frac{\sigma X_0}{\sqrt{1-\sigma^2}}\end{cases}$

$$\boxed{x(t)=X_0e^{-\sigma\omega_0t}\left(\cos(\omega_Pt)+\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\sin(\omega_Pt)\right)}$$

__Exo 4 : Réponse à l'échelon – Avec amortissement__ (détailler les étapes)

On a $\frac{d^2f(t)}{dt^2}+2\sigma\omega_0\cdot\frac{df(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot f(t)=\psi$, avec $\omega_0\in\mathbb{R}^+$, $\sigma>1$, et à $t=0$, $\begin{cases}f(0)=0\\ \dot{f}(0)=0\end{cases}$, Pour $t>0$, calculer $f(t)=$

$$\begin{cases}1\_eq\_caract : r^2+2\sigma\omega_0\cdot r+\omega_0^2=0\\ \quad \Delta=4\omega_0^2\left(\sigma^2-1\right)>0\\ \quad \rightarrow\ \text{2 racines réelles distinctes} : r_{1/2}=\omega_0\left(-\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-1}\right)\\ \quad f^{SSM}(t)=A\cdot e^{r_1t}+B\cdot e^{r_2t}\\ 2\_f^{PART}(t)=\frac{\psi}{\omega_0^2}\\ 3\_f(t)=f^{SSM}(t)+f^{PART}(t)=\frac{\psi}{\omega_0^2}+A\cdot e^{r_1t}+B\cdot e^{r_2t}\\ 4\_CI1\_f(0)=0=\frac{\psi}{\omega_0^2}+A+B\\ \quad CI2\_\dot{f}(0)=0=Ar_1+Br_2\end{cases}$$

d'où : $\begin{cases}B=...\\ A=...\end{cases}$

$$\boxed{f(t)=\frac{\psi}{\omega_0^2}+A\cdot e^{r_1t}+B\cdot e^{r_2t}}$$

On a $\dfrac{d^2f(t)}{dt^2}+2\sigma\omega_0\cdot\dfrac{df(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot f(t)=\psi$, avec $\omega_0\in\mathbb{R}^+$, $\sigma=1$, et à $t=0$, $\begin{cases} f(0)=0 \\ \dot{f}(0)=0 \end{cases}$, Pour $t>0$, calculer $f(t)=$

$$\begin{cases} 1\_eq\_caract : r^2+2\sigma\omega_0\cdot r+\omega_0^2=0 \\ \qquad \Delta=4\omega_0^2\left(\sigma^2-1\right)=0 \\ \qquad \to \text{ 1 racine double : } r=-\sigma\omega_0 \\ \qquad f^{SSM}(t)=\left(At+B\right)\cdot e^{-\sigma\omega_0 t} \\ 2\_f^{PART}(t)=\dfrac{\psi}{\omega_0^2} \\ 3\_f(t)=f^{SSM}(t)+f^{PART}(t)=\dfrac{\psi}{\omega_0^2}+\left(At+B\right)\cdot e^{-\sigma\omega_0 t} \\ 4\_CI1\_f(0)=0=\dfrac{\psi}{\omega_0^2}+B \\ \qquad CI2\_\dot{f}(0)=0=A+Br \end{cases}$$

d'où : $\boxed{f(t)=\dfrac{\psi}{\omega_0^2}\left(1-\left(1-rt\right)\cdot e^{-\sigma\omega_0 t}\right)}$

On a $\dfrac{d^2f(t)}{dt^2}+2\sigma\omega_0\cdot\dfrac{df(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot f(t)=\psi$, avec $\omega_0\in\mathbb{R}^+$, $\sigma<1$, et à $t=0$, $\begin{cases} f(0)=0 \\ \dot{f}(0)=0 \end{cases}$, Pour $t>0$, calculer $f(t)=$

$$\begin{cases} 1\_eq\_caract : r^2+2\sigma\omega_0\cdot r+\omega_0^2=0 \\ \qquad \Delta=4\omega_0^2\left(\sigma^2-1\right)=0 \\ \qquad \to \text{ 2 racines complexes : } r_{1/2}=-\sigma\omega_0\pm i\omega_0\sqrt{1-\sigma^2}=-\sigma\omega_0\pm i\omega_P \\ \qquad f^{SSM}(t)=e^{-\sigma\omega_0 t}\left(A\cos(\omega_P t)+B\sin(\omega_P t)\right) \\ 2\_f^{PART}(t)=\dfrac{\psi}{\omega_0^2} \\ 3\_f(t)=f^{SSM}(t)+f^{PART}(t)=\dfrac{\psi}{\omega_0^2}+e^{-\sigma\omega_0 t}\left(A\cos(\omega_P t)+B\sin(\omega_P t)\right) \\ 4\_CI1\_f(0)=0=\dfrac{\psi}{\omega_0^2}+A \\ \qquad CI2\_\dot{f}(0)=0=-\sigma\omega_0 A+\omega_P B \end{cases}$$

On obtient alors : $\begin{cases} A=-\dfrac{\psi}{\omega_0^2} \\ B=\dfrac{\sigma\omega_0 A}{\omega_P}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\cdot\dfrac{-\psi}{\omega_0^2} \end{cases}$

$$\boxed{f(t)=\frac{\psi}{\omega_0^2}\left[1-e^{-\sigma\omega_0 t}\left(\cos(\omega_P t)+\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\sin(\omega_P t)\right)\right]}$$