F1) TD : Intégration (première partie).

F1.1) Calculer les intégrales suivantes : $\int_{-1}^{1}(\text{Arcsin}(x))^2dx$; $\int_{0}^{\pi/6}\frac{dx}{\cos(x)+\cos(3x)}$ ($t = \sin(x)$) ; $\int_{0}^{\pi}\sin^4(x)\cos^2(x)dx$.

- *Corrigé* : • On peut directement intégrer par parties, mais il paraît plus simple de faire d'abord un changement de variable (même si, après coup, la méthode directe se révèle simple) $x = \sin(t)$: $\int_{-1}^{1}(\text{Arcsin}(x))^2dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}t^2.\cos(t)dt$, qu'on intègre deux fois par parties :

$$\int_{-1}^{1}(\text{Arcsin}(x))^2dx = [t^2.\sin(t)]_{-\pi/2}^{\pi/2} - 2.\int_{-\pi/2}^{\pi/2}t.\sin(t)dt = \frac{\pi^2}{2} - 2([-t.\cos(t)]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)dt) = \frac{\pi^2}{2} - 2.[\sin(t)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2} - 4.$$

- *Directement par parties* : $\int_{-1}^{1}(\text{Arcsin}(x))^2dx = [x.\text{Arcsin}^2(x)]_{-1}^{1} - 2.\int_{-1}^{1}\frac{x.\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx =$ (pour $u = \text{Arcsin}(x)$, $v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$)

$$\frac{\pi^2}{2} - 2([-\sqrt{1-x^2}.\text{Arcsin}(x)]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}dx) = \frac{\pi^2}{2} - 4.$$

• Comme $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3.\cos(x)\sin^2(x)$ (formule de Moivre), alors :

$\cos(x) + \cos(3x) = \cos(x)(\cos^2(x) - 3.\sin^2(x) + 1) = 2.\cos(x)(1 - 2.\sin^2(x))$.

- Il est plus simple d'utiliser : $\cos(x) + \cos(3x) = \cos(p) + \cos(q) = 2.\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) = 2.\cos(x).\cos(2x)$.

Donc : $\int_{0}^{\pi/6}\frac{dx}{\cos(x)+\cos(3x)} = \frac{1}{2}.\int_{0}^{\pi/6}\frac{\cos(x)dx}{\cos^2(x)(1-2.\sin^2(x))} = \frac{1}{2}.\int_{0}^{\pi/6}\frac{\cos(x)dx}{(1-\sin^2(x))(1-2.\sin^2(x))}$; pour $u = \sin(x)$:

$$\int_{0}^{\pi/6}\frac{dx}{\cos(x)+\cos(3x)} = \frac{1}{2}.\int_{0}^{1/2}\frac{du}{(1-u^2)(1-2u^2)} = \frac{1}{2}.\int_{0}^{1/2}(\frac{2}{1-2u^2} - \frac{1}{1-u^2})du = \frac{1}{\sqrt{2}}.\int_{0}^{1/2}\frac{d(\sqrt{2}u)}{1-(\sqrt{2}u)^2} - \frac{1}{2}.\int_{0}^{1/2}\frac{du}{1-u^2} =$$

(Voir F1.4 pour le développement de la primitive de $\text{Argth}(u) = \frac{1}{2}.\ln((1+u)/(1-u))$).

$$\frac{1}{\sqrt{2}}.[\text{Argth}(\sqrt{2}u)]_0^{1/2} - \frac{1}{2}.[\text{Argth}(u)]_0^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\text{Argth}(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{2}.\text{Argth}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{4}.\ln(3).$$

• Avec les formules d'Euler : $\sin^4(x)\cos^2(x) = \frac{1}{64}.(e^{ix} - e^{-ix})^4(e^{ix} + e^{-ix})^2 = \frac{1}{64}.(e^{ix} - e^{-ix})^2(e^{ix} - e^{-ix})^2(e^{ix} + e^{-ix})^2 =$

$\frac{1}{64}.(e^{ix} - e^{-ix})^2(e^{ix} - e^{-ix})^2 = \frac{1}{64}.(e^{6ix} + e^{-6ix} - 2.e^{4ix} - 2.e^{-4ix} - e^{2ix} - e^{-2ix} + 4) = \frac{1}{32}.(\cos(6x) - 2.\cos(4x) - \cos(2x)) + \frac{1}{16}$, d'où :

$$\int_{0}^{\pi}\sin^4(x)\cos^2(x)dx = \frac{1}{32}.[\frac{1}{6}.\sin(6x) - \frac{1}{2}.\sin(4x) - \frac{1}{2}.\sin(2x)]_0^{\pi} + \frac{1}{16}.[x]_0^{\pi} = \frac{\pi}{16}.$$

On peut aussi se passer des formules d'Euler : $\sin^4(x)\cos^2(x) = \sin^2(x)(\sin^2(x)\cos^2(x)) = \frac{1}{4}.\sin^2(x)\sin^2(2x) =$
$\frac{1}{16}.(1 - \cos(2x))(1 - \cos(4x)) = \frac{1}{16}.(1 \_ \cos(2x) - \cos(4x) + \cos(2x).\cos(4x)) = \frac{1}{32}.(\cos(6x) - 2.\cos(4x) - \cos(2x)) + \frac{1}{16}$.

Ensuite, comme $\int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx = 0$: $\int_{0}^{\pi}\sin^4(x)\cos^2(x)dx = \int_{0}^{\pi}\frac{1}{16}.dx = \frac{\pi}{16}$.

F1.2) Calculer l'intégrale $\int_{I}((x-y)dx + (x+y)dy)$ selon les deux chemins donnés par :

$$\Gamma_1 : \{x = 1 - t,\ y = t,\ t \in I = [0, 1]\}, \text{ et : } \Gamma_2 : \{x = \cos(\theta),\ y = \sin(\theta),\ \theta \in I = [0, \pi/2]\}.$$

- *Corrigé* : • $\int_{I}((x-y)dx + (x+y)dy) = \int_{0}^{1}2t.dt = 1$.

• $\int_{I}((x-y)dx + (x+y)dy) = \int_{0}^{\pi/2}((\cos(\theta) - \sin(\theta)).(-\sin(\theta))d\theta + ((\cos(\theta) + \sin(\theta)).\cos(\theta)d\theta) = \int_{0}^{\pi/2}d\theta = \pi/2$.

- *Remarque* : On va dans les deux cas du point $(1, 0)$ au point $(0, 1)$ et on ne trouve pas le même résultat. Une différentielle dont l'intégrale ne dépend pas du chemin choisi est appelée une différentielle totale.

On a, par exemple, une différentielle totale en changeant un seul signe dans l'énoncé : Pour $A:(1, 0)$ et $B:(0, 1)$, alors : $\int_{A}^{B}((x-y)dx - (x+y)dy) = -1$ selon les deux chemins Γ_1 et Γ_2, ainsi que tous les autres. La raison en est qu'il s'agit de la partie réelle de $f(z)dz$ pour $f(z) = (1 + i)z$. L'intégrale est ainsi égale à la partie réelle de

$\int_1^i f(z)dz = -1 - i$.

F1.3) *a*) f étant dérivable sur [0, 1], calculer : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum\limits_{i=1}^{n} f(i/n)f'(i/n)$.

b) f étant continue par morceaux sur [0, 1], écrire sous forme d'une intégrale : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}.\sum\limits_{i=0}^{2n} \inf\{i, 2n - i\}.f(i/2n)$.

- *Corrigé* : *a*) Soit a = 0, b= 1 et $g(x) = \frac{1}{2}.f(x)^2$; alors, la somme de Riemann de g' sur [0, 1] est égale à son intégrale : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}.\sum\limits_{i=1}^{n} g'(a + i.\frac{b-a}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum\limits_{i=1}^{n} f(i/n)f'(i/n) = \int_0^1 g'(x)dx = [g(x)]_0^1 = g(1) - g(0) = \frac{1}{2}.(f(1)^2 - f(0)^2)$.

b) $\frac{1}{n^2}.\sum\limits_{i=0}^{2n} \inf\{i, 2n - i\}.f(i/2n) = \frac{1}{n^2}.\sum\limits_{i=0}^{n} \inf\{i, 2n - i\}.f(i/2n) + \frac{1}{n^2}.\sum\limits_{i=n+1}^{2n} \inf\{i, 2n - i\}.f(i/2n) =$

$\frac{1}{n^2}.\sum\limits_{i=0}^{n} i.f(i/2n) + \frac{1}{n^2}.\sum\limits_{i=n+1}^{2n} (2n - i).f(i/2n) = \frac{2}{n}.\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{i}{2n}.f(i/2n) + \frac{2}{n}.\sum\limits_{i=n+1}^{2n} (1 - \frac{i}{2n}).f(i/2n)$.

On pose j = i - n dans la seconde somme, et on fait partir i de 1 dans la première (car le premier terme est nul) :

$\frac{1}{n^2}.\sum\limits_{i=0}^{2n} \inf\{i, 2n - i\}.f(i/2n) = \frac{2}{n}.\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{2n}.f(\frac{i}{2n}) + \frac{2}{n}.\sum\limits_{j=1}^{n} (\frac{1}{2} - \frac{j}{2n}).f(\frac{1}{2} + \frac{j}{2n})$.

On pose : $g(x) = \frac{x}{2}.f(\frac{x}{2})$, et : $h(x) = (\frac{1}{2} - \frac{x}{2}).f(\frac{1}{2} + \frac{x}{2})$; alors (en remettant i à la place de j) :

$\frac{1}{n^2}.\sum\limits_{i=0}^{2n} \inf\{i, 2n - i\}.f(i/2n) = \frac{2}{n}.\sum\limits_{i=1}^{n} g(\frac{i}{n}) + \frac{2}{n}.\sum\limits_{i=1}^{n} h(\frac{i}{n})$.

Ce sont des sommes de Riemann avec a = 0 et b = 1, les limites sont donc les intégrales :

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}.\sum\limits_{i=0}^{2n} \inf\{i, 2n - i\}.f(i/2n) = 2.(\int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 h(x)dx) = \int_0^1 (x.f(\frac{x}{2}) + (1 - x).f(\frac{1 + x}{2}))dx$.

- Il y a un autre changement d'indice plus intéressant : k = 2n - i ; alors :

$\frac{1}{n^2}.\sum\limits_{i=0}^{2n} \inf\{i, 2n - i\}.f(i/2n) = \frac{1}{n^2}.\sum\limits_{i=0}^{n-1} i.f(i/2n) + \frac{1}{n}.f(1/2) + \frac{1}{n^2}.\sum\limits_{k=0}^{n-1} k.f(1 - k/2n) = \frac{1}{n}.\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}.f(\frac{i}{2n}) + \frac{1}{n}.f(1/2) + \frac{1}{n}.\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}.f(1 - \frac{k}{2n})$.

Quand n tend vers l'infini, pour $g(x) = x.f(\frac{x}{2})$ et $h(x) = x.f(1 - \frac{x}{2})$, on obtient : $\int_0^1 x.(f(\frac{x}{2}) + f(1 - \frac{x}{2}))dx$.

F1.4) Calculer pour $b \in]0, \pi/2[$ l'intégrale : $\int_0^b \frac{dx}{\cos(x)}$. Est-elle convergente quand $b = \pi/2$?

- *Corrigé* : $\frac{dx}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)dx}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)dx}{1 - \sin^2(x)} = (\frac{a}{1 - \sin(x)} + \frac{b}{1 + \sin(x)}).\cos(x)dx$.

On obtient, peu importe la méthode : $\frac{dx}{\cos(x)} = \frac{1}{2}.(\frac{1}{1 - \sin(x)} + \frac{1}{1 + \sin(x)}).\cos(x)dx$.

En posant : $u = \sin(x)$, alors : $du = \cos(x)dx$. Ainsi :

$\int_0^b \frac{dx}{\cos(x)} = \frac{1}{2}.\int_0^{\sin(b)} (\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u}).du$ (on peut aussi utiliser la dérivée de Argth si on la connaît).

$\int_0^b \frac{dx}{\cos(x)} = \frac{1}{2}.[-\ln(1 - u) + \ln(1 + u)]_0^{\sin(b)} = \frac{1}{2}.\ln(\frac{1 + \sin(b)}{1 - \sin(b)}) = \mathrm{Argth}(\sin(b))$.

Elle diverge donc quand b tend vers $\pi/2$.