F2) TD : Intégration (deuxième partie).

F2.1) Étudier la convergence des intégrales : $\int_0^1 \frac{(e^x - 1)dx}{x}$; $\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{x + 1}$; $\int_0^1 \frac{\ln(x)dx}{x - 1}$; $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sin(x)}$; $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)}dx$.

- *Corrigé* : • La fonction $f(x) = \frac{(e^x - 1)}{x}$ peut être prolongée par continuité en posant $f(0) = 0$; elle devient ainsi continue, donc intégrable sur $[0, 1]$.

• La fonction $(x \mapsto \frac{e^{-x}}{x + 1})$ est continue, donc intégrable, sur tout segment de $[0, +\infty[$ (condition nécessaire d'intégrabilité : CNI).

Étude au voisinage de $+\infty$: $0 \leq \frac{e^{-x}}{x + 1} \leq e^{-x}$, dont on sait qu'elle est intégrable au voisinage de $+\infty$ (ne serait-ce que parce que $e^{-x} << 1/x^2$). L'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{x + 1}$ est donc convergente.

• La fonction $f(x) = \frac{\ln(x)}{x - 1}$ peut être prolongée par continuité en 1, en posant $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1}$, le nombre dérivé en 1 de $(x \mapsto \ln(x))$ (on peut aussi changer de variable en posant $t = x - 1$). Donc : $f(1) = 1$.
f est continue, donc intégrable, sur tout segment de $]0, 1]$ (CNI).

Étude au voisinage de 0 : $\frac{\ln(x)}{x - 1} \sim -\ln(x)$ qui admet une primitive prolongeable par continuité en 0, à savoir la fonction : $(x \mapsto x - x.\ln(x))$. *Autre méthode* : $0 \leq -\ln(x) \leq 1/\sqrt{x}$ au voisinage de 0.

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)dx}{x - 1}$ est donc convergente.

• La fonction $(x \mapsto \frac{1}{x + \sin(x)})$ est continue, donc intégrable, sur tout segment de $]0, 1]$ (CNI).

Étude au voisinage de 0 : $\sin(x) \sim x$, donc $\frac{1}{x + \sin(x)} \sim \frac{1}{2x}$ qui n'est pas intégrable.

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sin(x)}$ est donc divergente.

• La fonction $(x \mapsto \sqrt{\tan(x)})$ est continue, donc intégrable, sur tout segment de $[0, \pi/2[$ (CNI).

Étude au voisinage de $\pi/2$: $\sqrt{\tan(x)} \sim 1/\sqrt{\cos(x)}$; on pose $y = \frac{\pi}{2} - x$, et on étudie $1/\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} - y)}$ au voisinage de 0 : $1/\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} - y)} = 1/\sqrt{\sin(y)} \sim 1/\sqrt{y}$ qui est intégrable au voisinage de 0.

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)}dx$ est donc convergente.

F2.2) *a*) Étudier la convergence puis calculer si possible les intégrales suivantes :
$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\ln(\tan(x))dx$ (t = sin(x), voire par parties) ; $\int_0^1 \frac{\ln(1 - x^2)dx}{x^2}$; $\int_0^\infty \frac{(\ln(x) + \mathrm{Arctan}(x))dx}{x^2 + 1}$.

b) Montrer que les trois fonctions sous les signes $\int$ sont intégrables sur les intervalles ouverts des bornes d'intégration. Écrire la formule de changement de variable avec $|\phi'|$ pour la première intégrale (avec $t = \sin(x)$).

- *Corrigé* : *a*) • La fonction $f(x) = \cos(x)\ln(\tan(x))$ peut être prolongée par continuité en $\pi/2$, en calculant sa limite ; pour ce faire, on pose $y = \pi/2 - x$ et on calcule la limite quand y tend vers 0 :
$\cos(x)\ln(\tan(x)) = \cos(\pi/2 - y)\ln(\tan(\pi/2 - y)) = \sin(y)\ln(1/\tan(y)) = -\sin(y)\ln(\tan(y)) \sim -y.\ln(y) \to 0$.
On peut donc prolonger par continuité en posant $f(\pi/2) = 0$. Alors, f est continue, donc intégrable, sur tout segment de $]0, \pi/2]$ (CNI).

Étude au voisinage de 0 : $\cos(x)\ln(\tan(x)) \sim \ln(x)$ qui est intégrable au voisinage de 0 comme ayant une primitive qui l'est, à savoir $x.\ln(x) - x$ (ou bien : $0 \le -\ln(x) \le 1/\sqrt{x}$).

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\ln(\tan(x))dx$ est donc convergente.

On intègre par parties ($u = \ln(\tan(x))$, $v' = \cos(x)$), mais sur $[0, b]$,où l'on fera tendre b vers $\pi/2$ ensuite :

$$\int_0^b \cos(x)\ln(\tan(x))dx = [\sin(x)\ln(\tan(x))]_0^b - \int_0^b \frac{dx}{\cos(x)} = (\text{cf. F1.4}) = \sin(b)\ln(\tan(b)) - \text{Argth}(\sin(b)).$$

Il faut calculer la limite quand b tend vers $\pi/2$, en posant $a = \pi/2 - b$, et faisant tendre a vers 0 :

$\sin(b)\ln(\tan(b)) - \text{Argth}(\sin(b)) = -\cos(a)\ln(\tan(a)) - \text{Argth}(\cos(a)) =$

$$-(1 - a^2/2 + o(a^2)).\ln(a) - \text{Argth}(1 - a^2/2 + o(a^2)) = -(1 - a^2/2 + o(a^2)).\ln(a) - \tfrac{1}{2}.\ln(\frac{2 - a^2/2 + o(a^2)}{a^2/2 + o(a^2)}) =$$

$$-(1 - a^2/2 + o(a^2)).\ln(a) - \tfrac{1}{2}.\ln(2 - a^2/2) + \tfrac{1}{2}.\ln(a^2/2) = -(1 - a^2/2 + o(a^2)).\ln(a) - \tfrac{1}{2}.\ln(2 - a^2/2) + \ln(a) - \tfrac{1}{2}.\ln(2) =$$

$(a^2/2 + o(a^2)).\ln(a) - \tfrac{1}{2}.\ln(4 - a^2)$, dont la limite vaut $-\ln(2)$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\ln(\tan(x))dx = -\ln(2).$$

- *Autre méthode* : On pose $t = \sin(x)$; $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\ln(\tan(x))dx = \int_0^1 \ln(\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}})dt =$

$$\int_0^1 \ln(t)dt - \tfrac{1}{2}.\int_0^1 (\ln(1 - t) + \ln(1 + t))dt = [t.\ln(t) - t]_0^1 + \tfrac{1}{2}.[(1 - t)\ln(1 - t) - (1 + t)\ln(1 + t) + 2t]_0^1 =$$

$-1 + \tfrac{1}{2}.(-2.\ln(2) + 2) = -\ln(2)$.

• La fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1 - x^2)}{x^2}$ peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$. Alors, f est continue, donc intégrable, sur tout segment de $[0, 1[$ (CNI).

Étude au voisinage de 1 : $\dfrac{\ln(1 - x^2)}{x^2} \sim \ln(1 - x)$ qui possède une primitive prolongeable par continuité en 1, à savoir : $(x - 1).\ln(1 - x) - x$.

L'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\ln(1 - x^2)dx}{x^2}$ est donc convergente.

On l'intègre par parties ($u = \ln(1 - x^2)$, $v' = 1/x^2$), mais sur $[0, b]$:

$$\int_0^b \frac{\ln(1 - x^2)dx}{x^2} = [\frac{-\ln(1 - x^2)}{x}]_0^b - \int_0^b \frac{2dx}{1 - x^2} = [\frac{-\ln(1 - x^2)}{x} - \ln(\frac{1 + x}{1 - x})]_0^b = -[\frac{(1 - x)\ln(1 - x)}{x} + \frac{(1 + x)\ln(1 + x)}{x}]_0^b,$$ expression qui admet une limite en 1 : $\int_0^1 \dfrac{\ln(1 - x^2)dx}{x^2} = -[\dfrac{(1 - x)\ln(1 - x)}{x} + \dfrac{(1 + x)\ln(1 + x)}{x}]_0^1 = -2.\ln(2)$.

- *Autre méthode* : On peut utiliser le développement en série entière de $\ln(1 - x)$ qui est valide sur $[0, 1[$:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 - x^2)dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{-1}{x^2}.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}.dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n-2}}{n}.dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$$ qui converge, et qu'on peut même calculer :

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-2)} = -2.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} = -2.\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) = -2.\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^{2n}}{2n-1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n}) = -2.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -2.\ln(2).$$

• La fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x) + \text{Arctan}(x)}{x^2 + 1}$ est continue, donc intégrable, sur tout segment de $]0, +\infty[$ (CNI).

Étude au voisinage de 0 : $\dfrac{\ln(x) + \text{Arctan}(x)}{x^2 + 1} \sim \ln(x)$ qui est intégrable au voisinage de 0 (car elle a une primitive prolongeable par continuité, ou bien : $0 \le -\ln(x) \le 1/\sqrt{x}$).

Étude au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{\ln(x) + \text{Arctan}(x)}{x^2 + 1} = \dfrac{\ln(x)}{x^2 + 1} + \dfrac{\text{Arctan}(x)}{x^2 + 1} \sim \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}.\dfrac{1}{x^{3/2}} + \dfrac{\pi}{2x^2}$, produit et somme de fonctions intégrable au voisinage de $+\infty$. Mais il est plus simple d'écrire, pour $x \ge$: $0 \le \dfrac{\ln(x)}{x^2 + 1} \le \dfrac{\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$, et d'utiliser le théorème de majoration par une intégrale convergente.

L'intégrale $\int_0^{\infty} \dfrac{(\ln(x) + \text{Arctan}(x))dx}{x^2 + 1}$ est donc convergente.

On la calcule en séparant la somme en deux intégrales : $\int_0^\infty \frac{(\ln(x) + \text{Arctan}(x))dx}{x^2 + 1} = \int_0^\infty \frac{\ln(x)dx}{x^2 + 1} + \int_0^\infty \frac{(\text{Arctan}(x))dx}{x^2 + 1}$; la seconde est de la forme uu', et on pose $t = 1/x$ dans la première :

$\int_0^\infty \frac{(\text{Arctan}(x))dx}{x^2 + 1} = [\frac{1}{2}.\text{Arctan}^2(x)]_0^\infty = \frac{\pi^2}{8}$.

Soit $I = \int_0^\infty \frac{\ln(x)dx}{x^2 + 1} = -\int_0^\infty \frac{\ln(1/t)}{1 + 1/t^2}.\frac{-dt}{t^2} = -\int_0^\infty \frac{\ln(t)dt}{1 + t^2} = -I$, d'où : $I = 0$. Finalement : $\int_0^\infty \frac{(\ln(x) + \text{Arctan}(x))dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi^2}{8}$.

b) Les fonctions sous les signes $\int$ sont *intégrables* si les intégrales sont absolument convergentes.

$\int_0^{\pi/2} |\cos(x)\ln(\tan(x))|dx = -\int_0^{\pi/4} \cos(x)\ln(\tan(x))dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(x)\ln(\tan(x))dx$, il y a bien convergence absolue.

$\int_0^1 |\frac{\ln(1 - x^2)}{x^2}|dx = -\int_0^1 \frac{\ln(1 - x^2)dx}{x^2}$, il y a aussi convergence absolue.

$\int_0^\infty |\frac{\ln(x) + \text{Arctan}(x)}{x^2 + 1}|dx = \int_0^\alpha \frac{(\ln(x) + \text{Arctan}(x))dx}{x^2 + 1} + \int_\alpha^\infty \frac{(\ln(x) + \text{Arctan}(x))dx}{x^2 + 1}$, où α est l'unique annulation de la fonction $\ln(x) + \text{Arctan}(x)$ (fonction strictement croissante car sa dérivée est strictement positive, négative en $1/e$ et positive en 1 ; $\alpha \approx 0{,}59$). Il y a une nouvelle fois convergence absolue.

Formule de changement de variable pour la première : $\int_I f = \int_J f\circ\phi.|\phi'|$, où ϕ est de classe C^1 de J sur I.

- *Ici* : $f(t) = \ln(\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}})$, $\phi(x) = \sin(x)$, $\phi(J) = \phi([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1] = I$. Alors :

$\int_{[0, 1]} \ln(\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}})dt = \int_{[0, \pi/2]} \ln(\tan(x)).|\cos(x)|dx$.

- *Dans l'autre sens* : $f(x) = \ln(\tan(x)).\cos(x)$, $\phi(t) = \text{Arcsin}(t)$, $\phi(J) = \phi([0, 1]) = [0, \frac{\pi}{2}] = I$. Alors :

$\int_{[0, \pi/2]} \ln(\tan(x)).\cos(x)dx = \int_{[0, 1]} \ln(\tan(\text{Arcsin}(t))).\cos(\text{Arcsin}(t)).|\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}|dt =$

$\int_{[0, 1]} \ln(\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}})dt$ (car $\cos(\text{Arcsin}(t)) = \sqrt{1 - t^2}$ sur $[0, 1]$).

Ce sens paraît plus approprié pour répondre à la question de l'exercice.

F2.3) Trouver les polynômes P tels que : $\int_0^\infty (\sqrt{P(x)} - x - 1)dx$ converge.

- *Corrigé* : Il y en a au moins un qui vient tout de suite à l'esprit : $(x + 1)^2$. Y en a-t-il d'autres ?

- *1ère condition* : P positive au voisinage de $+\infty$.

Soit $a_n x^n$ le terme de plus haut degré de P ; la limite en $+\infty$ de P est donnée par le signe de a_n, pour que la racine de P y soit définie, il est donc nécessaire que $a_n > 0$.

- *2ème condition* : $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{P(x)} - x - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{P(x) - x^2 - 2x - 1}{\sqrt{P(x)} + x + 1} = 0$.

Si $n > 2$, les termes de plus hauts degrés du numérateur et du dénominateur sont : $\frac{a_n x^n}{\sqrt{a_n} x^{n/2}} = \sqrt{a_n} x^{n/2}$; la limite serait infinie.

Si $n < 2$, les termes de plus hauts degrés du numérateur et du dénominateur sont : $\frac{-x^2}{x} = -x$; la limite serait encore infinie.

Donc $n = 2$, soit les termes de plus haut degré : $\frac{(a_2 - 1)x^2}{(\sqrt{a_2} + 1)x} = \frac{(a_2 - 1)x}{\sqrt{a_2} + 1}$, ce qui rend nécessaire que $a_2 = 1$. Soit :

$$P(x) = x^2 + bx + c.$$

Alors, les termes de plus haut degré sont maintenant : $\frac{(b - 2)x}{2x} = \frac{(b - 2)}{2}$, ce qui rend nécessaire que $b = 2$. Soit :

$$P(x) = x^2 + 2x + c.$$

À ce stade, la limite est bien nulle.

- *3ème condition* : Que l'intégrale converge ; au voisinage de $+\infty$ on a maintenant : $\dfrac{P(x) - x^2 - 2x - 1}{\sqrt{P(x)} + x + 1} \sim \dfrac{c - 1}{2x}$. Or, on sait que ça ne peut converger que si $c = 1$.

Finalement : $(x + 1)^2$ est l'unique polynôme pour lequel cette intégrale converge.

F2.4) Étudier la convergence des intégrales suivantes en fonction de α : $\int_0^\infty \dfrac{dx}{x + x^\alpha}$; $\int_0^\infty \dfrac{\ln(x)\text{Arctan}(x)dx}{x^\alpha}$.

- *Corrigé* : • La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x + x^\alpha}$ est continue, donc intégrable, sur tout segment de $]0, +\infty[$ (CNI).

Étude au voisinage de 0 : Si $\alpha < 1$, $\dfrac{1}{x + x^\alpha} \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$ qui est intégrable au voisinage de 0.

Si $\alpha = 1$, $\dfrac{1}{x + x^\alpha} \sim \dfrac{1}{2x}$ qui n'est pas intégrable au voisinage de 0.

Si $\alpha > 1$, $\dfrac{1}{x + x^\alpha} \sim \dfrac{1}{x}$ qui n'est pas intégrable au voisinage de 0.

Étude au voisinage de $+\infty$: Si $\alpha < 1$, $\dfrac{1}{x + x^\alpha} \sim \dfrac{1}{x}$ qui n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

Si $\alpha = 1$, $\dfrac{1}{x + x^\alpha} \sim \dfrac{1}{2x}$ qui n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

Si $\alpha > 1$, $\dfrac{1}{x + x^\alpha} \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Conclusion : L'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{dx}{x + x^\alpha}$ est toujours divergente.

• La fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x)\text{Arctan}(x)}{x^\alpha}$ est continue, donc intégrable, sur tout segment de $]0, +\infty[$ (CNI).

Étude au voisinage de 0 : Si $\alpha < 1$, $\dfrac{\ln(x)\text{Arctan}(x)}{x^\alpha} \sim x^{1-\alpha}.\ln(x)$ qui est prolongeable par continuité, donc intégrable au voisinage de 0.

Si $\alpha = 1$, $\dfrac{\ln(x)\text{Arctan}(x)}{x^\alpha} \sim \ln(x)$ qui est intégrable au voisinage de 0 (comme ayant une primitive qui l'est, à savoir $x.\ln(x) - x$, ou bien : $0 \le -\ln(x) \le 1/\sqrt{x}$).

Si $1 < \alpha < 2$, $\dfrac{\ln(x)\text{Arctan}(x)}{x^\alpha} \sim \dfrac{\ln(x)}{x^{\alpha-1}}$ qui est intégrable au voisinage de 0, car il existe $\beta < 1$ tel que $x^\beta.\dfrac{\ln(x)}{x^{\alpha-1}}$ tende vers 0 ($\beta = \alpha/2$ convient).

Si $\alpha \ge 2$, $\dfrac{\ln(x)\text{Arctan}(x)}{x^\alpha} \sim \dfrac{\ln(x)}{x^{\alpha-1}}$ qui n'est pas intégrable au voisinage de 0

Étude au voisinage de $+\infty$: Si $\alpha \le 1$, $\dfrac{\ln(x)\text{Arctan}(x)}{x^\alpha} \sim \dfrac{\pi.\ln(x)}{2x^\alpha}$ qui n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

Si $\alpha > 1$, $\dfrac{\ln(x)\text{Arctan}(x)}{x^\alpha} \sim \dfrac{\pi.\ln(x)}{2x^\alpha}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$, car il existe $\beta > 1$ tel que $x^\beta.\dfrac{\pi.\ln(x)}{2x^\alpha}$ tende vers 0 ($\beta = (1 + \alpha)/2$ convient).

Conclusion : L'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{\ln(x)\text{Arctan}(x)dx}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si : $1 < \alpha < 2$.

F2.5) Pour tout entier naturel n, existence et calcul de : *a*) $I_n = \int_0^\infty x^n.e^{-x}dx$; *b*) $I_n = \int_0^\pi \dfrac{\sin(nx)dx}{\sin(x)}$ (calculer $I_{n+2} - I_n$).

- *Corrigé* : *a*) La fonction $f(x) = x^n.e^{-x}$ est continue, donc intégrable, sur tout segment de $[0, +\infty[$ (CNI).

Étude au voisinage de $+\infty$: Pour x assez grand, $0 \le e^{-x} \le x^{-n-2}$; donc : $0 \le x^n.e^{-x} \le x^{-2}$. Par suite, l'intégrale converge.

$I_0 = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$; Par parties : $\int_0^\infty x^n.e^{-x}dx = [-x^n.e^{-x}]_0^\infty + n.\int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx$, donc : $I_n = n.I_{n-1}$ pour $n \ge 1$.

Finalement : $I_n = n!$

b) La fonction $f(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sin(x)}$ est prolongeable par continuité en posant $f(0) = n$ $\left(\dfrac{\sin(nx)}{\sin(x)} = n.\dfrac{\sin(nx)}{nx}.\dfrac{x}{\sin(x)}\right)$. De même, elle est prolongeable par continuité en π, en posant $y = \pi - x$, et en cherchant sa limite quand y tend vers 0 : $\dfrac{\sin(nx)}{\sin(x)} = \dfrac{\sin(n\pi - ny)}{\sin(\pi - y)} = (-1)^{n+1}.\dfrac{\sin(ny)}{\sin(y)} = (-1)^{n+1}.n.\dfrac{\sin(ny)}{ny}.\dfrac{y}{\sin(y)}$, donc : $f(\pi) = (-1)^{n+1}.n$.

Cette fonction est ainsi continue, donc intégrable, sur $[0, \pi]$.

$I_0 = 0$; $I_1 = \pi$; $I_{n+2} - I_n = \int_0^\pi \dfrac{(\sin((n+2)x) - \sin(nx))dx}{\sin(x)} = \int_0^\pi \dfrac{(\sin((n+2)x) - \sin(nx))dx}{\sin(x)} = 2.\int_0^\pi \cos((n+1)x)dx = 0$.

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = 0$ et $I_{2n+1} = \pi$.