

F3) TD : Intégration (troisième partie).

F3.1) Étudier, pour $x > 0$, la dérivabilité de la fonction : $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{(e^{-t} - e^{-tx})dt}{t}$; en déduire une expression simple de $f(x)$.

- *Corrigé* : Rappel du cours :

Hypothèses : Soit I et J deux intervalles réels et $g : I \times J \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} dérivable par rapport à x . On suppose que : $\forall x \in I$, les fonctions $(t \mapsto g(x, t))$ et $(t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t))$ sont continues par morceaux et intégrables sur J . S'il existe une fonction ϕ continue par morceaux et intégrable sur J telle que : $\forall (x, t) \in I \times J, |\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)| \leq \phi(t)$.

Conclusion : Alors la fonction f définie par $f(x) = \int_J g(x, t)dt$ est de classe C^1 sur I , avec : $f'(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)dt$.

Ici : Il faut d'abord établir la convergence de l'intégrale :

Pour $x > 0$: $\int_0^{\infty} e^{-tx}dt = 1/x$, tandis que $g(x, t)$ est continue, donc intégrable, sur tout fermé borné de $]0, +\infty[$ (condition nécessaire d'intégrabilité : CNI).

Étude au voisinage de 0 : Comme $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} = x - 1$, on peut faire un prolongement par continuité.

Étude au voisinage de $+\infty$: $|g(x, t)| \leq \sup(e^{-t}, e^{-tx})$ (le premier si $x \geq 1$, le second sinon), qui sont deux fonctions intégrables au voisinage de $+\infty$. L'intégrale de $g(x, t)$ est donc bien convergente.

Hypothèses du théorème : $g(x, t) = \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}$ est dérivable selon x avec : $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = e^{-tx}$; donc : $(t \mapsto g(x, t))$ et $(t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t))$ sont continues (par morceaux) et intégrables sur $J = [0, +\infty[$, les intégrales $\int_0^{\infty} \frac{(e^{-t} - e^{-tx})dt}{t}$ et $\int_0^{\infty} e^{-tx}dt$ étant convergentes :

Il ne reste plus qu'à trouver ϕ , ne dépendant pas de x : $|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)| = e^{-tx} \leq \phi(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$ qui est bien intégrable sur J .

Conclusion : $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{(e^{-t} - e^{-tx})dt}{t}$ est de classe C^1 sur $I =]0, +\infty[$, avec : $f'(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)dt = 1/x$. En conséquence de quoi $f(x) = \ln(x) + k$ où $f(1) = 0$, donc $k = 0$: $f(x) = \ln(x)$.

F3.2) Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité et les variations de : $f(x) = \int_0^1 \frac{e^t dt}{t+x}$, ainsi que les limites aux bornes.

- *Corrigé* : Rappel du cours :

Hypothèses : Soit I et J deux intervalles réels et $g : I \times J \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t . S'il existe une fonction positive ϕ continue par morceaux intégrable sur J telle que : $\forall (x, t) \in I \times J, |g(x, t)| \leq \phi(t)$ (*hypothèse de domination*).

Conclusion : Alors la fonction f définie par $f(x) = \int_J g(x, t)dt$ est continue sur I .

Ici : Si on montre que f est dérivable, elle est automatiquement continue, la démonstration de la continuité est donc inutile. On va la faire quand même :

- $g(x, t) = \frac{e^t}{t+x}$ est définie si $x+t$ est de signe constant non nul quand t varie dans $J = [0, 1]$, donc : Soit $x < -1$, soit $x > 0$. Comme, dans ce cas on intègre une fonction continue, l'intégrale est définie. Ainsi :

$I = D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

- Dans ce cas, la fonction $g(x, t)$ est continue à la fois selon la variable x sur I et la variable t sur J . Ensuite :

$\forall a > 0$, pour $x \in]-\infty, -1-a] \cup [a, +\infty[$: $|g(x, t)| \leq \phi(t) = e^{t/a}$ qui est continue et intégrable sur J .

Il s'en suit que $f(x)$ est continue sur $]-\infty, -1-a] \cup [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur I .

• $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{-e^t}{(t+x)^2}$, est continue et intégrable sur J . En outre :

$\forall a > 0$, pour $x \in]-\infty, -1-a] \cup [a, +\infty[$: $|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)| \leq \psi(t) = e^{t/a^2}$ qui est continue et intégrable sur J .

Il s'en suit que f est dérivable sur $]-\infty, -1-a] \cup [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur I , avec :

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^1 \frac{-e^t dt}{(t+x)^2}$$

• $\int_0^1 \frac{e^t dt}{1+x} \leq f(x) \leq \int_0^1 \frac{e^t dt}{x} \Leftrightarrow \frac{e-1}{1+x} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}$, donc : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, et : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Pour $x > 0$: $f(x) \geq \int_0^1 \frac{dt}{t+x} = \ln(1+x) - \ln(x)$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

Pour $x < -1$: $f(x) \leq \int_0^1 \frac{e \cdot dt}{t+x} = e \cdot (\ln|1+x| - \ln|x|)$, donc : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

- **Remarque** : L'encadrement $\ln|1+1/x| \leq f(x) \leq e \cdot \ln|1+1/x|$ convient pour les quatre limites.

• **Autre méthode** : On pose $u = t + x$ dans l'intégrale, alors : $f(x) = e^{-x} \cdot \int_x^{x+1} \frac{e^u du}{u}$, ce qui prouve automatiquement la continuité et la dérivabilité sur I , avec en outre : $f'(x) = -f(x) + \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}$, ce qui prouve au passage que f est de classe C^∞ , et solution d'une équation différentielle.

F3.3) Étudier la continuité et la dérivabilité de : $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(x \cdot \cos(t)) dt$; montrer que f est bornée. Développer

f en série entière (on admet que : $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}$).

- **Corrigé** : Même remarque qu'à l'exercice précédent, si on montre que f est dérivable, elle est automatiquement continue, la démonstration de la continuité est donc inutile. On va la faire quand même :

• $g(x, t) = \sin(x \cdot \cos(t))$ est définie et continue selon la variable $x \in I = \mathbb{R}$, et selon la variable $t \in J = [0, \pi/2]$. En outre : $|g(x, t)| \leq \phi(t) = 1$ qui est continue et intégrable sur J . En conséquence de quoi f est continue sur I .

• $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \cos(t) \cdot \cos(x \cdot \cos(t))$ est continue et intégrable sur J , avec : $|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)| \leq \psi(t) = |\cos(t)|$ (ou $\psi(t) = 1$) qui est continue et intégrable sur J . Il s'en suit que f est dérivable sur I , avec :

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot \cos(x \cdot \cos(t)) dt$$

• Comme $-1 \leq \cos(x \cdot \cos(t)) \leq 1$, alors : $-\int_0^{\pi/2} dt \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} dt$, d'où : $-\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2$.

• On sait que : $\sin(x \cdot \cos(t)) = \sum_0^\infty (-1)^n \cdot \cos^{2n+1}(t) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} (\sum_0^\infty (-1)^n \cdot \cos^{2n+1}(t) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}) dt$ et la série $\sum_0^\infty (-1)^n \cdot (\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})$ sont convergentes ; l'intégrale car c'est $f(x)$, la série car elle est absolument convergente :

$$\sum_0^\infty |(-1)^n \cdot (\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \sum_0^\infty \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sh}(|x|)$$

Ces deux expressions sont égales si on peut intervertir le \int et le \sum ; on sait que c'est possible avec les séries entières, mais ici la variable d'intégration n'est pas x mais t . Mais, comme pour tout entier naturel N on a l'égalité : $\int_0^{\pi/2} (\sum_0^N (-1)^n \cdot \cos^{2n+1}(t) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}) dt = \sum_0^N (-1)^n \cdot (\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t) dt) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, et ces deux suites étant égales terme à terme et convergeant toutes deux, elles ne peuvent converger que vers la même limite.

En conséquence de quoi : $f(x) = \sum_0^\infty (-1)^n \cdot (\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t) dt) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, où l'on pose $u = \sin(t)$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t) dt = \int_0^1 (1-u^2)^n du = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 (-u^2)^k du = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} \text{ d'après l'indication.}$$

$$\text{- Conclusion : } f(x) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_0^\infty \frac{(-4)^n \cdot (n!)^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!^2}.$$

- *Démonstration de l'indication* : Par parties ($u = \cos^{2n}(t)$, $v' = \cos(t)$) :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t) dt = [\sin(t)\cos^{2n}(t)] + 2n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1}(t)\sin^2(t) dt = 2n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1}(t) dt - 2n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t) dt =$$

$$I_n = 2n \cdot I_{n-1} - 2n \cdot I_n, \text{ d'où : } I_n = \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{n-1} = \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)} \cdot I_{n-2} = \dots = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3} \cdot I_0 = \frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} \text{ (car } I_0 = 1).$$

F3.4) Montrer que pour tout réel x : $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+itx} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot \cos(tx) dt$, puis qu'elle est dérivable.

- *Corrigé* : Il faut d'abord établir les convergences :

e^{-t^2+itx} est continue, donc intégrable sur tout fermé borné de $]-\infty, +\infty[$ (CNI).

Au voisinage de $+\infty$, elle est absolument convergente car :

$$0 \leq |e^{-t^2+itx}| \leq e^{-t^2} \text{ qui y est intégrable car majorée, par } 1/t^2, \text{ ou } e^{-t}, \text{ etc..}$$

Au voisinage de $-\infty$, elle est absolument convergente car :

$$0 \leq |e^{-t^2+itx}| \leq e^{-t^2} \text{ qui y est intégrable car majorée, par } 1/t^2.$$

On peut aussi séparer l'intégrale en deux en coupant par 0 , et changer de variable dans celle dont l'intervalle est négatif en posant $u = -t$.

Donc : $\int_0^{\infty} e^{-t^2+itx} dt$ converge, et il en va de même de sa partie réelle et de sa partie imaginaire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+itx} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} (\cos(tx) + i \sin(tx)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cdot \cos(tx) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cdot \sin(tx) dt ;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+itx} dt \text{ est donc bien convergente, avec : } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+itx} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-t^2+itx} dt + \int_0^{\infty} e^{-t^2+itx} dt =$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} \cdot \cos(tx) dt + \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot \cos(tx) dt + i \left(\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} \cdot \sin(tx) dt + \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot \sin(tx) dt \right). \text{ On pose } u = -t \text{ sur }]-\infty, 0] :$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+itx} dt = \int_0^{\infty} e^{-u^2} \cdot \cos(ux) du + \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot \cos(tx) dt + i \left(-\int_0^{\infty} e^{-u^2} \cdot \sin(ux) du + \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot \sin(tx) dt \right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cdot \cos(tx) dt.$$

(Attention : il est déconseillé d'utiliser la parité sur un intervalle infini ; par exemple : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t}$ n'est pas nulle, elle diverge).

La fonction $g(x, t) = e^{-t^2} \cdot \cos(tx)$ est dérivable selon x , avec $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -t \cdot e^{-t^2} \cdot \sin(tx)$; donc : $(t \mapsto g(x, t))$ et

$(t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t))$ sont continues et intégrables sur $J = [0, +\infty[$; la première a déjà été montrée, et la seconde est

aussi majorée, en valeur absolue, par e^{-t} . En outre, comme on vient de le dire : $|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)| \leq \phi(t) = e^{-t}$, continue et

intégrable sur J . Il en résulte que $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+itx} dt$ est dérivable, avec : $f'(x) = -2 \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t^2} \cdot \sin(tx) dt$.

F3.5) Étudier le domaine de définition et la monotonie de : $f(x) = \int_1^{\infty} \frac{dt}{(1+t)t^x}$; trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$. Montrer que f est continue en $x > 0$ en appliquant le théorème des accroissements finis à $\phi(t) = t^{-h}$ sur $[1, t]$; distinguer les cas : $h > 0$, et $-1 < h < 0$ (en déduire une majoration de : $|f(x+h) - f(x)|$).

- *Corrigé* : • $h(t) = \frac{1}{(1+t)t^x}$ est définie et continue sur $J = [1, +\infty[$, intégrable sur tout fermé borné de J (CNI).

$$\text{On note aussi : } g(x, t) = \frac{1}{(1+t)t^x}.$$

Étude au voisinage de $+\infty$: $\frac{1}{(1+t)t^x} \sim \frac{1}{t^{x+1}}$, faisant converger l'intégrale si et seulement si $x+1 > 1$, donc : $x > 0$.

Par suite : $I = D_f =]0, +\infty[$.

Soit $x < y$; alors, comme $t \geq 1$ sur J , $g(x, t) \geq g(y, t)$ car en divisant par un réel plus grand ($t^y \geq t^x$), on obtient un résultat plus petit. Il en résulte que f est décroissante car l'intégrale peut être appliquée à l'inégalité :

$$g(x, t) \geq g(y, t) \Rightarrow \int_1^{\infty} g(x, t) dt \geq \int_1^{\infty} g(y, t) dt.$$

• $g(x+1, t) = \frac{1}{(1+t)t^{x+1}} = \frac{1+t-t}{(1+t)t^{x+1}} = \frac{1}{t^{x+1}} - g(x, t)$, donc, à condition que l'intégrale de $\frac{1}{t^{x+1}}$ converge, ce qui est le cas car $\frac{1}{t^{x+1}} = g(x, t) + g(x+1, t)$ qui donne la somme de deux intégrales convergentes, alors :

$$f(x+1) = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} - f(x) = \left[\frac{1}{-x \cdot t^x} \right]_1^{\infty} - f(x) = \frac{1}{x} - f(x).$$

• Théorème des accroissements finis à $\phi(t) = t^{-h}$ sur $[1, t]$, $t \geq 1$: C'est une fonction dérivable donc :

$$\exists c \in]1, t[, \phi(t) - \phi(1) = (t-1)\phi'(c) \Leftrightarrow t^{-h} - 1 = (t-1)(-h) \cdot c^{-h-1}.$$

- Si $h > 0$, on en déduit que : $0 \leq 1 - t^{-h} = (t-1)h \cdot e^{-(h+1) \cdot \ln(c)} \leq (t-1)h < t \cdot h$.

$$\text{Par suite : } 0 \leq f(x) - f(x+h) = \int_1^{\infty} \frac{(1-t^{-h})dt}{(1+t)t^x} \leq h \cdot f(x-1).$$

- Si $-1 < h < 0$, on en déduit que : $0 \leq t^{-h} - 1 = (t-1)(-h) \cdot e^{-(h+1) \cdot \ln(c)} \leq (t-1)(-h) < t \cdot (-h)$.

$$\text{Par suite : } 0 \leq f(x+h) - f(x) = \int_1^{\infty} \frac{(t^{-h} - 1)dt}{(1+t)t^x} \leq (-h) \cdot f(x-1).$$

- Il en résulte que : $\lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x)| = 0$, donc : $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$; f est continue.