F) TD : Intégration.

F1.1) Calculer les intégrales suivantes : $\int_{-1}^{1}(\mathrm{Arcsin}(x))^2dx$; $\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{\cos(x)+\cos(3x)}$ ($t = \sin(x)$) ; $\int_0^{\pi}\sin^4(x)\cos^2(x)dx$.

F1.2) Calculer l'intégrale $\int_\Gamma((x - y)dx + (x + y)dy)$ selon les deux chemins donnés par :

$\Gamma_1 : \{x = 1 - t,\ y = t,\ t \in I = [0, 1]\}$, et : $\Gamma_2 : \{x = \cos(\theta),\ y = \sin(\theta),\ \theta \in I = [0, \pi/2]\}$.

F1.3) *a*) f étant dérivable sur $[0, 1]$, calculer : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} f(i/n)f'(i/n)$.

b) f étant continue par morceaux sur $[0, 1]$, écrire sous forme d'une intégrale : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}.\sum_{i=0}^{2n}\inf\{i, 2n - i\}.f(i/2n)$.

F1.4) Calculer pour $b \in\ ]0, \pi/2[$ l'intégrale : $\int_0^b\frac{dx}{\cos(x)}$. Est-elle convergente quand $b = \pi/2$?

F2.1) Étudier la convergence des intégrales : $\int_0^1\frac{(e^x - 1)dx}{x}$; $\int_0^\infty\frac{e^{-x}dx}{x+1}$; $\int_0^1\frac{\ln(x)dx}{x-1}$; $\int_0^1\frac{dx}{x+\sin(x)}$; $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan(x)}dx$.

F2.2) *a*) Étudier la convergence puis calculer si possible les intégrales suivantes :

$\int_0^{\pi/2}\cos(x)\ln(\tan(x))dx$ ($t = \sin(x)$, voire par parties) ; $\int_0^1\frac{\ln(1 - x^2)dx}{x^2}$; $\int_0^\infty\frac{(\ln(x) + \mathrm{Arctan}(x))dx}{x^2+1}$.

b) Montrer que les trois fonctions sous les signes $\int$ sont intégrables sur les intervalles ouverts des bornes d'intégration. Écrire la formule de changement de variable avec $|\phi'|$ pour la première intégrale (avec $t = \sin(x)$).

F2.3) Trouver les polynômes P tels que : $\int_0^\infty(\sqrt{P(x)} - x - 1)dx$ converge.

F2.4) Étudier la convergence des intégrales suivantes en fonction de α : $\int_0^\infty\frac{dx}{x+x^\alpha}$; $\int_0^\infty\frac{\ln(x)\mathrm{Arctan}(x)dx}{x^\alpha}$.

F2.5) Pour tout entier naturel n, existence et calcul de : *a*) $I_n = \int_0^\infty x^n.e^{-x}dx$; *b*) $I_n = \int_0^\pi\frac{\sin(nx)dx}{\sin(x)}$ (calculer $I_{n+2} - I_n$).

F3.1) Étudier, pour $x > 0$, la dérivabilité de la fonction : $f(x) = \int_0^\infty\frac{(e^{-t} - e^{-tx})dt}{t}$; en déduire une expression simple de $f(x)$.

F3.2) Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité et les variations de : $f(x) = \int_0^1\frac{e^t.dt}{t+x}$, ainsi que les limites aux bornes.

F3.3) Étudier la continuité et la dérivabilité de : $f(x) = \int_0^{\pi/2}\sin(x.\cos(t))dt$; montrer que f est bornée. Développer f en série entière (on admet que : $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}.\binom{n}{k} = \frac{4^n.(n!)^2}{(2n+1)!}$).

F3.4) Montrer que pour tout réel x : $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2+itx}dt = 2.\int_0^\infty e^{-t^2}.\cos(tx)dt$, puis qu'elle est dérivable.

F3.5) Étudier le domaine de définition et la monotonie de : $f(x) = \int_1^{\infty} \frac{dt}{(1 + t)t^x}$; trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x + 1)$. Montrer que f est continue en $x > 0$ en appliquant le théorème des accroissements finis à $\phi(t) = t^{-h}$ sur $[1, t]$; distinguer les cas : $h > 0$, et $-1 < h < 0$ (en déduire une majoration de : $|f(x + h) - f(x)|$).