F) TD : Intégration.

F1.1) Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^1 \text{Arctan}(x^{1/3})dx$; $\int_0^1 \frac{dx}{ch(x) - ch(2)}$ ($t = e^x$) ; $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin(x)dx}{\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}}$ ($t = \cos(2x)$).

F1.2) Calculer, si possible, l'intégrale $\int_I ((2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy)$ selon les deux chemins donnés par :

$\Gamma_1 : \{x = 1 - t,\ y = t,\ t \in I = [0, 1]\}$, et : $\Gamma_2 : \{x = \cos(\theta),\ y = \sin(\theta),\ \theta \in I = [0, \pi/2]\}$.

F1.3) Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$. Calculer : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} f'(i/n)$; application à : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} n.i/(n^2 + i^2)$.

F1.4) Calculer pour $a \in\ ]0, \pi/2[$ l'intégrale : $\int_a^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x)}$. Est-elle convergente pour $a = 0$?

F1.5) Soit $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4(x)dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \sin^4(x)dx$, $K = 2.\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^2(x)dx$; calculer K, $I - J$, $I + J + K$. En déduire I et J.

F2.1) Étudier la convergence des intégrales : $\int_0^1 \frac{e^{-1/x}.dx}{x}$; $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$; $\int_0^\infty \frac{sh(x)dx}{sh(\lambda x)}$ ($\lambda > 0$ réel) ; $\int_{2/\pi}^\infty \ln(\sin(1/x))dx$.

F2.2) Étudier la convergence puis calculer si possible les intégrales suivantes : $\int_0^\infty \ln(1 + 1/x^2)dx$; $\int_0^\pi x.\ln(\sin(x))dx$ ($t = \pi - x$, puis : $\sin(x) = 2.\sin(x/2)\cos(x/2)$) ; $\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1 - x)dx}{x}$ (série de $\ln(1 - x)$; on admet qu'on peut échanger le Σ et le $\int$. Le résultat final est une série convergente dont on ne connaît qu'une valeur approchée).

F2.3) Étudier la convergence des intégrales suivantes en fonction de α : $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + x^\alpha}$; $\int_0^\pi x^\alpha.\ln(\sin(x))dx$.

F2.4) Pour tout entier naturel n, existence et calcul de : $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}}$; $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)dx$ (utiliser un changement de variable, une intégration par parties, ou la formule d'Euler : attention en intégrant, il y a une exception quand l'indice du Σ vaut n).

F2.5) Soit f intégrable sur tout fermé borné de $]0, +\infty[$, telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$. Montrer que, pour $\eta < 1$ et $2 < A$: $\int_\eta^A \frac{(f(2x) - f(x))dx}{x} = \int_A^{2A} \frac{f(x)dx}{x} - \int_\eta^{2\eta} \frac{f(x)dx}{x}$ (séparer $[\eta, A]$ en $[\eta, 1]$ et $[1, A]$, puis poser $t = 2x$). En déduire la convergence de l'intégrale : $\int_0^\infty \frac{(f(2x) - f(x))dx}{x}$, et calculer là. (Écrire les deux limites, où $\eta \to 0$ et $A \to +\infty$).

F3.1) Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de : $f(x) = \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-xt^2})dt}{t^2}$, calculer sa dérivée et en déduire son expression ($\int_0^\infty e^{-u^2}.du = \sqrt{\pi}/2$).

F3.2) Montrer que l'intégrale $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t+itx}.dt}{\sqrt{t}}$ est convergente et que la fonction f est dérivable.

F3.3) Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de : $f(x) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 + x.\cos(t)}}$. Montrer que : $f'(x) = \frac{1}{2}.\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\frac{1}{(1 - x.\cos(t))^{3/2}} - \frac{1}{(1 + x.\cos(t))^{3/2}})\cos(t).dt$, en déduire que f est paire et ses variations. Calculer la limite en 1 de $f(x)$ et dresser son tableau de variation.

F3.4) Étudier la fonction définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par : $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. (Dont les limites aux bornes ; pour 1 : $\frac{1}{\ln(t)} \times \frac{t}{t}$).