G1) TD : Déterminants (première partie).

G1.1) Calculer : (le but est évidemment de faire le moins de calculs possibles)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & \sin(a) & \cos(a) \\ 1 & \sin(b) & \cos(b) \\ 1 & \sin(c) & \cos(c) \end{vmatrix}.$$

- *Corrigé* : • $\{L_2 - L_1 \to L_2,\ L_3 - L_1 \to L_3\}$: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} =$

$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix} = \{L_2 - L_1 \to L_2\}$: $(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 0 & ac-ab+c^2-b^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 0 & a+b+c \end{vmatrix} =$

$(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$.

- On peut aussi appliquer la méthode des déterminants de Vandermonde bien que ça n'en soit pas un :

$\{C_2 - a.C_1 \to C_2,\ C_3 - a^2.C_2 \to C_3\}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^3-a^2b \\ 1 & c-a & c^3-a^2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^2b \\ c-a & c^3-a^2c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & ab+b^2 \\ 1 & ac+c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

• $\{L_1 + L_2 + L_3 \to L_3\}$: $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ a^2+ab+b^2 & a^2+ab+b^2 & a^2+ab+b^2 \end{vmatrix} = (a^2+ab+b^2)\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$\{C_2 - C_1 \to C_2,\ C_3 - C_1 \to C_3\}$: $(a^2+ab+b^2)\begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b^2 & a^2-b^2 & ab-b^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a^2+ab+b^2)\begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ a^2-b^2 & ab-b^2 \end{vmatrix} =$

$(a^2+ab+b^2)(a-b)^2\begin{vmatrix} -a & -a-b \\ a+b & b \end{vmatrix} = (a^2+ab+b^2)^2(a-b)^2 = (a^3-b^3)^2$.

- *Autre méthode* : Règle de Sarrus : $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \\ \mathit{a^2} & \mathit{ab} & \mathit{b^2} \\ \mathit{b^2} & \mathit{a^2} & \mathit{ab} \end{vmatrix} = a^6 + b^6 + a^3b^3 - a^3b^3 - a^3b^3 - a^3b^3 =$

$a^6 + b^6 - 2a^3b^3 = (a^3 - b^3)^2$.

• $\{C_1 + C_2 - C_3 \to C_1\}$: $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix} = \{C_2 - C_1 \to C_2\}$:

$2.\begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c^2 & a^2 & a^2+b^2 \\ c^3 & a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix} = \{C_2 - C_1 \to C_2\}$: $2.\begin{vmatrix} c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \\ c^3 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} = 2abc.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 2abc.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$

(*Vandermonde*) $= 2abc.(c-a)(c-b)(b-a)$.

• $\{L_2 - L_1 \to L_2,\ L_3 - L_1 \to L_3\}$: $\begin{vmatrix} 1 & \sin(a) & \cos(a) \\ 1 & \sin(b) & \cos(b) \\ 1 & \sin(c) & \cos(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin(a) & \cos(a) \\ 0 & \sin(b)-\sin(a) & \cos(b)-\cos(a) \\ 0 & \sin(c)-\sin(a) & \cos(c)-\cos(a) \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} \sin(b)-\sin(a) & \cos(b)-\cos(a) \\ \sin(c)-\sin(a) & \cos(c)-\cos(a) \end{vmatrix} = 4.\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) & -\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{a+c}{2}\right) & -\sin\left(\frac{a+c}{2}\right) \end{vmatrix} = 4.\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{c-b}{2}\right).$$

Le calcul direct du déterminant d'ordre 2 aurait donné : $\sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a)$.

G1.2) Montrer sans le calculer que ce déterminant est divisible par 13 : $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ (13 divise 169, 273 et 546).

- *Corrigé* : $100.L_1 + 10.L_2 + L_3 \to L_3$: $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 546 & 273 & 169 \end{vmatrix} = 13.\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 42 & 21 & 13 \end{vmatrix}$.

G1.3) Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos(c) & \cos(b) \\ 1 & \cos(c) & 1 & \cos(a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(a) & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 32 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ -32 & -3 & 0 & 32 & 4 \\ -1 & 4 & -32 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -4 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

- *Corrigé* : • Les vecteurs colonnes de la matrice dont on prend le déterminant sont orthogonaux deux à deux et de même norme, c'est donc une famille orthogonale qu'on peut transformer en famille orthonormale en divisant par $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Si $a = b = c = d = 0$, ce déterminant est nul ; sinon :

Soit $M = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}.\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$, c'est une matrice orthogonale donc : ${}^tMM = I$ (car ce produit contient les produits scalaires de la famille orthonormale). Il en résulte que $\det(M) = \pm 1$.

Donc : $\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} = \det(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.M) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}^{\,4}.\det(M) = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

Le signe dépend de l'orientation de la base des vecteurs colonnes (cf. ch. I). En posant $a = 1$ et $b = c = d = 0$, on trouve le signe positif, donc :

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

• $\{C_2 - C_1 \to C_2,\ C_3 - C_1 \to C_3,\ C_4 - C_1 \to C_4\}$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos(c) & \cos(b) \\ 1 & \cos(c) & 1 & \cos(a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(a) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cos(c)-1 & \cos(b)-1 \\ 1 & \cos(c)-1 & 0 & \cos(a)-1 \\ 1 & \cos(b)-1 & \cos(a)-1 & 0 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 0 & \cos(c)-1 & \cos(b)-1 \\ \cos(c)-1 & 0 & \cos(a)-1 \\ \cos(b)-1 & \cos(a)-1 & 0 \end{vmatrix}$. On utilise ensuite la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos(c)-1 & \cos(b)-1 \\ \cos(c)-1 & 0 & \cos(a)-1 \\ \cos(b)-1 & \cos(a)-1 & 0 \\ \mathit{0} & \mathit{\cos(c)-1} & \mathit{\cos(b)-1} \\ \mathit{\cos(c)-1} & \mathit{0} & \mathit{\cos(a)-1} \end{vmatrix} = 2.(\cos(a) - 1)(\cos(b) - 1)(\cos(c) - 1).$$

• La matrice M dont on prend le déterminant est antisymétrique donc : $\det(M) = \det({}^tM) = \det(-M) = (-1)^5.\det(M)$. Par suite : $\det(M) = 0$. (*Conclusion* : Une matrice antisymétrique d'ordre impair n'est pas inversible).

G1.4) Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \text{ (2n lignes) } ; \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & x \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+x_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \dots & a_n+x_n \end{vmatrix}.$$

- *Corrigé* : • On effectue les opérations suivantes : $(C_i + C_{2n-i} \to C_i,\ 1 \le i \le n)$, et on peut alors mettre $(a + b)$ en facteur n fois dans les n premières colonnes, et ainsi :

$$\Delta = (a+b)^n.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & a & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

On fait ensuite : $(L_{2n-i} - L_i \to L_{2n-i},\ 1 \le i \le n)$, et on peut alors mettre $(a - b)$ en facteur n fois dans les n dernières lignes, et ainsi :

$$\Delta = (a+b)^n(a+b)^n.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il en résulte, comme il reste le déterminant d'une matrice triangulaire, que : $\Delta = (a^2 - b^2)^n$.

- *Autre méthode* : On note $\Delta_n = \det(M_n)$ ce déterminant, et on le développe suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & M_{n-1} & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots\ 0 & a \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & M_{n-1} & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

; on développe ces deux déterminants selon la dernière colonne (la signature du coefficient b du second vaut $(-1)^{2n}$) : $\Delta_n = (a^2 - b^2).\Delta_{n-1}$.

Comme il ne paraît pas permis de poser $\Delta_0 = 1$, on arrête la récurrence à Δ_1 : $\Delta_n = (a^2 - b^2)^{n-1}.\Delta_1 =$

$\Delta_n = (a^2 - b^2)^{n-1}.\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n$ (ce qui valide $\Delta_0 = 1$).

• On note Δ_{n+1} ce déterminant d'ordre $n + 1$, et on le développe suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & x \end{vmatrix} = x.\Delta_n + (-1)^n a_n.\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \\ & & & & & a_{n-1} \\ & & & & & \vdots \\ & & x.I_{n-1} & & & \vdots \\ & & & & & a_2 \\ & & & & & a_1 \end{vmatrix} = x.\Delta_n + (-1)^n a_n.[(-1)^{n-1}a_n.x^{n-1}] =$$

$\Delta_{n+1} = x.\Delta_n - a_n^2.x^{n-1} = x^2.\Delta_{n-1} - (a_n^2 + a_{n-1}^2).x^{n-1} = \dots = x^{n-1}.\Delta_2 - (a_n^2 + a_{n-1}^2 + \dots + a_2^2).x^{n-1} =$

$\Delta_{n+1} = x^{n-1}.\begin{vmatrix} x & a_1 \\ a_1 & x \end{vmatrix} - (a_n^2 + a_{n-1}^2 + \dots + a_2^2).x^{n-1} = x^{n+1} - x^{n-1}.\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ (ce qui valide $\Delta_1 = x$, voire $\Delta_0 = 1$).

- *Autre méthode* (nécessitant la connaissance du chapitre H) :

Soit $\Delta_{n+1} = \det(M)$, où M est la matrice dans la base canonique d'un endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^{n+1}$.

$\mathrm{Ker}(f)$ est donné par les deux équations cartésiennes $\{x_{n+1} = 0,\ a_n x_1 + .. + a_1 x_n = 0\}$; il est donc de dimension $n - 1$, ce qui signifie que 0 est valeur propre de multiplicité $n - 1$, et il y a donc λ^{n-1} en facteur dans le polynôme caractéristique de M.

Par ailleur, en notant e_i le i-ième vecteur de la base canonique, et $u = a_n.e_1 + .. + a_1.e_n$, on a ainsi :

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u, e_{n+1})$ (ce qui est conforme au théorème du rang). On a en outre : $f(u) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2.e_{n+1}$, et : $f(e_{n+1}) = u$. Donc, $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f. Tout vecteur propre autre que ceux du noyau est donc de la forme : $v = \alpha.u + \beta.e_{n+1}$, avec : $f(v) = \beta.u + \alpha.\sum_{k=1}^{n} a_k^2.e_{n+1} = \lambda.(\alpha.u + \beta.e_{n+1})$, d'où : $\lambda^2 = a_k^2$. Les deux dernières valeurs propres sont $\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$, et il y a $(\lambda^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2)$ en facteur dans le polynôme caractéristique de M.

Par suite : $\det(M - \lambda.I) = \pm\lambda^{n-1}(\lambda^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2)$, et $\Delta_{n+1} = \det(M + x.I) = \pm(x^{n+1} - x^{n-1}.\sum_{k=1}^{n} a_k^2)$.

Le terme de plus haut degré étant obtenu en faisant le produit de la diagonale, alors : $\Delta_{n+1} = x^{n+1} - x^{n-1}.\sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

• On se place dans $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$, et on note $u = a_1.e_1 + .. + a_n.e_n$. Alors :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+x_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \dots & a_n+x_n \end{vmatrix} = \det(u + x_1.e_1, u + x_2.e_2, ..., u + x_n.e_n)$$, qu'on développe par multilinéarité :

Et comme tous les déterminants ayant deux fois le vecteur u en argument sont nuls, alors :

$\Delta_n = x_1x_2...x_n.\det(B) + \sum_{k=1}^{n} x_1...x_{k-1}x_{k+1}...x_n.\det(e_1, ..., e_{k-1}, u, e_{k+1}, ..., e_n) = x_1x_2...x_n + \sum_{k=1}^{n} x_1...x_{k-1}a_kx_{k+1}...x_n =$

$\Delta_n = \prod_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} a_k.\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} x_i$. Si tous les x_i sont non nuls : $\Delta_n = \prod_{k=1}^{n} x_k.(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x_k})$.

- *Remarque* : Soit $x = x_1.e_1 + .. + x_n.e_n$, et $f(x) = x_1x_2...x_n$; alors : $\Delta_n = f(x) + df[x](u)$.