

## G2) TD : Déterminants (deuxième partie).

G2.1) Soit  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y_n = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , et  $J_n = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$ . Calculer les déterminants suivants, pour  $n \geq 3$  :  $\Delta_n = \det({}^t X_n Y_n)$  et  $\Delta'_n = \det({}^t X_n Y_n + {}^t J_n J_n)$ . ( $X_n, Y_n$  et  $J_n$  sont des matrices lignes).

- *Corrigé* :  $X_n$  et  $Y_n$  n'étant pas des matrices carrées, il est interdit d'appliquer la loi sur le déterminant d'un produit de matrices carrées.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{vmatrix} = y_1 y_2 \dots \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & \dots & x_n y_n \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{deux colonnes égales}).$$

- *Autre présentation* : On note  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $E = \mathbb{R}^n$ , et  $u = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$  ; alors :  $\Delta_n = \det(y_1 \cdot u, y_2 \cdot u, \dots, y_n \cdot u) = 0$  car c'est le déterminant de vecteurs linéairement dépendants.

On note  $v = e_1 + e_2 + \dots + e_n$  ; alors :  $\Delta'_n = \det(y_1 \cdot u + \lambda^2 \cdot v, y_2 \cdot u + \lambda^2 \cdot v, \dots, y_n \cdot u + \lambda^2 \cdot v)$ .  $\{C_1 - C_2 \rightarrow C_1, C_2 - C_3 \rightarrow C_2\}$  :  $\Delta'_n = \det((y_1 - y_2) \cdot u, (y_2 - y_3) \cdot u, \dots, y_n \cdot u + \lambda^2 \cdot v) = 0$  car les deux premiers vecteurs sont linéairement dépendants.

G2.2) Étant donnée  $M$  une matrice à coefficients complexes ayant  $n$  colonnes  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , on définit les colonnes :  $B_j = \sum_{k \neq j} C_k$ , et soit  $N$  la matrice formée de ces  $n$  nouvelles colonnes. Exprimer  $\det(N)$  en fonction de  $\det(M)$ . (Trouver une expression plus simple de  $B_j$ ).

- *Corrigé* : On a :  $B_j = (\sum_{k=1}^n C_k) - C_j$ . On note  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_n$  les vecteurs dont les colonnes de composantes dans  $B$  sont respectivement  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , et  $v = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Alors :  $\det(N) = \det(v - u_1, v - u_2, \dots, v - u_n)$ , où l'on applique la multilinéarité, sachant que si deux des arguments valent  $v$ , alors le déterminant est nul. Donc :

$\det(N) = (-1)^n \cdot \det(u_1, u_2, \dots, u_n) + (-1)^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n \det(u_1, \dots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \dots, u_n)$ . Mais, en soustrayant toutes les autres colonnes à celle de  $v$ , il ne reste plus que  $u_k$  :  $\det(u_1, \dots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \dots, u_n) = \det(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ . Par suite :  $\det(N) = -(-1)^{n-1} \cdot \det(u_1, u_2, \dots, u_n) + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot \det(u_1, u_2, \dots, u_n) = (-1)^{n-1} (n-1) \cdot \det(M)$ .

G2.3) Étant donné un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n-2$ , calculer :

$$\begin{vmatrix} P(x+1) & P(x+2) & \dots & P(x+n) \\ P(x+2) & P(x+3) & \dots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & \dots & P(x+2n-1) \end{vmatrix}. \text{ En déduire : } \begin{vmatrix} 1 & 2^p & \dots & n^p \\ 2^p & 3^p & \dots & (n+1)^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^p & (n+1)^p & \dots & (2n-1)^p \end{vmatrix} \quad (\text{pour } p \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket).$$

(Le degré de  $P$  est très important).

- *Corrigé* :  $P \in E = \mathbb{R}_{n-2}[X]$ , qui est de dimension  $n-1$ , ce dont il résulte que toute famille de  $n$  polynômes est liée. Donc, en notant  $Q_k(X) = P(X+k)$ , alors  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$  est liée : Il existe des coefficients dont au moins un n'est pas nul  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , tels que :  $\alpha_1 \cdot Q_1 + \alpha_2 \cdot Q_2 + \dots + \alpha_n \cdot Q_n = \Theta$  (le polynôme nul).

Comme c'est une égalité polynomiale, en assimilant les polynômes formels et les fonctions polynômes, on peut encore écrire :  $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 \cdot Q_1(x) + \alpha_2 \cdot Q_2(x) + \dots + \alpha_n \cdot Q_n(x) = 0$  (le nombre réel).

Ou bien, ce qui revient au même :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \alpha_1 \cdot Q_1(x+k) + \alpha_2 \cdot Q_2(x+k) + \dots + \alpha_n \cdot Q_n(x+k) = 0$ ,

Qui s'écrit aussi :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \alpha_1 \cdot Q_{k+1}(x) + \alpha_2 \cdot Q_{k+2}(x) + \dots + \alpha_n \cdot Q_{k+n}(x) = 0$ .

$$\text{En conséquence de quoi : } \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ Q_2(x) \\ \dots \\ Q_n(x) \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} Q_2(x) \\ Q_3(x) \\ \dots \\ Q_{n+1}(x) \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \cdot \begin{pmatrix} Q_n(x) \\ Q_{n+1}(x) \\ \dots \\ Q_{2n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Il en résulte que : } \begin{vmatrix} Q_1(x) & Q_2(x) & \dots & Q_n(x) \\ Q_2(x) & Q_3(x) & \dots & Q_{n+1}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n(x) & Q_{n+1}(x) & \dots & Q_{2n-1}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P(x+1) & P(x+2) & \dots & P(x+n) \\ P(x+2) & P(x+3) & \dots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & \dots & P(x+2n-1) \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Pour } P(X) = X^p, \text{ et } x = 0, \text{ on obtient ainsi : } \begin{vmatrix} 1 & 2^p & \dots & n^p \\ 2^p & 3^p & \dots & (n+1)^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^p & (n+1)^p & \dots & (2n-1)^p \end{vmatrix} = 0.$$

G2.4) Étant donnée  $M$  une matrice à coefficients complexes non inversible. Montrer que  $P(x) = \det(M + x.I)$  est un polynôme de degré  $n$  (où  $n$  est la dimension de la matrice carrée  $M$ ). En déduire qu'il existe un réel  $a > 0$  tel que :  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, 0 < |\varepsilon| < a \Rightarrow \det(M + \varepsilon.I) \neq 0$ . (Donc :  $M + \varepsilon.I$  inversible).

- *Corrigé* : Si on connaît les propriétés du polynôme caractéristique, c'est immédiat, mais il s'agit ici de savoir le redémontrer. En notant  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_n$  les vecteurs dont les colonnes de composantes dans  $B$  sont les colonnes de  $M$ , alors :

$$\det(M + x.I) = \det(u_1 + x.e_1, u_2 + x.e_2, \dots, u_n + x.e_n).$$

On montre d'abord une propriété préliminaire par récurrence :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, d^\circ(\det(u_1 + x.e_1, u_2 + x.e_2, \dots, u_k + x.e_k, u_{k+1}, \dots, u_n)) \leq k.$$

- *Initialisation* : La propriété est vraie pour  $k = 0$  :  $d^\circ(\det(u_1, \dots, u_n)) \leq 0$ .

- *On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , et on passe au rang  $k+1$  en utilisant la multilinéarité* :  $\det(u_1 + x.e_1, u_2 + x.e_2, \dots, u_k + x.e_k, u_{k+1} + x.e_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n) =$

$$\det(u_1 + x.e_1, u_2 + x.e_2, \dots, u_k + x.e_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n) + x \cdot \det(u_1 + x.e_1, u_2 + x.e_2, \dots, u_k + x.e_k, e_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n) =$$

où l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour chacun des deux :

$$A = \det(u_1 + x.e_1, u_2 + x.e_2, \dots, u_k + x.e_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n), \text{ avec } d^\circ(A) \leq k,$$

$$B = \det(u_1 + x.e_1, u_2 + x.e_2, \dots, u_k + x.e_k, e_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n), \text{ avec } d^\circ(B) \leq k;$$

$$\text{d'où l'on déduit } d^\circ(A + Bx) \leq k + 1.$$

On peut ensuite prouver par récurrence sur  $n$  ; en notant  $B_n = (e_{n,1}, e_{n,2}, \dots, e_{n,n})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,n}) \in (\mathbb{R}^n)^n, d^\circ(\det(u_{n,1} + x.e_{n,1}, u_{n,2} + x.e_{n,2}, \dots, u_{n,n} + x.e_{n,n})) = n.$$

- *Initialisation* : La propriété est vraie pour  $n = 1$  :  $\det(u_{1,1} + x.e_{1,1}) = u_{1,1} + x$ , car en dimension 1 les vecteurs sont des réels, avec  $e_{1,1} = 1$ , et on obtient bien un polynôme dont le terme de plus haut degré est  $x^1$ .

- *On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang  $n$ , et on passe au rang  $n+1$  en utilisant la multilinéarité* :

$$\det(u_{n+1,1} + x.e_{n+1,1}, \dots, u_{n+1,n} + x.e_{n+1,n}, u_{n+1,n+1} + x.e_{n+1,n+1}) =$$

$$\det(u_{n+1,1} + x.e_{n+1,1}, \dots, u_{n+1,n} + x.e_{n+1,n}, u_{n+1,n+1}) + x \cdot \det(u_{n+1,1} + x.e_{n+1,1}, \dots, u_{n+1,n} + x.e_{n+1,n}, e_{n+1,n+1});$$

D'après la propriété précédente, pour  $A = \det(u_{n+1,1} + x.e_{n+1,1}, \dots, u_{n+1,n} + x.e_{n+1,n}, u_{n+1,n+1})$ ,  $d^\circ(A) \leq n$ .

On développe ensuite  $B = \det(u_{n+1,1} + x.e_{n+1,1}, \dots, u_{n+1,n} + x.e_{n+1,n}, e_{n+1,n+1})$  selon la dernière colonne ; et en notant  $u_{n,i}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  ayant les  $n$  premières composantes de  $u_{n+1,i}$ , et  $e_{n,i}$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  ayant les  $n$  premières composantes de  $e_{n+1,i}$ , alors :

$B = \det(u_{n,1} + x.e_{n,1}, u_{n,2} + x.e_{n,2}, \dots, u_{n,n} + x.e_{n,n})$ , donc  $d^\circ(B) = n$  d'après l'hypothèse de récurrence. Il s'en suit que  $d^\circ(A + Bx) = n + 1$ , ce qui prouve la propriété.

- *Conclusion* : Le terme de plus haut degré de  $\det(M + x.I)$  est  $x^n$  (cf. ch. H).

• On se place maintenant dans  $\mathbb{C}$  ; le polynôme  $\det(M + x.I)$  admet  $n$  racines complexes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Si toutes les racines sont nulles alors  $\det(M + x.I) = x^n$ , et  $\forall \varepsilon \neq 0, \det(M + \varepsilon.I) \neq 0$ .

S'il existe au moins une racine non nulle, soit :  $a = \inf\{|\lambda_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } \lambda_i \neq 0\}$  ; c'est un réel strictement positif.

Alors :  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon < a, \det(M + \varepsilon.I) \neq 0$  et  $\det(M - \varepsilon.I) \neq 0$  car  $\pm \varepsilon$  ne peut pas être une racine du polynôme.

En réunissant les deux cas :  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, 0 < |\varepsilon| < a \Rightarrow \det(M + \varepsilon.I) \neq 0$ .

G2.5) Étant données deux matrices carrées de même dimension  $A$  et  $B$ , soit alors la fonction numérique réelle  $f$  définie par :  $f(x) = \det(x.A + B)$ .

Montrer que  $f$  est un polynôme de degré  $n$  si et seulement si  $A$  est inversible. Illustrer cette propriété dans le cas particulier  $B = 0$ . (Plus rapide si on a préalablement résolu la première question du G2.4).

Soit les fonctions  $g$  et  $h$  définies par :  $g(x) = x.A + B$  et  $h(M) = \det(M)$  ( $M$  matrice carrée). Dans quel sens  $f$  est-elle la composée des deux ?

Dans le cas où  $A$  est la matrice ne contenant que des « 1 » et  $B = I$ , calculer la dérivée de  $f$  directement puis en utilisant la différentielle d'une fonction composée. (Montrer que dans le cas  $n = 2$  on a  $\det(u, v)' = \det(u', v) + \det(u, v')$ ).

- **Corrigé** : • Si  $A$  est inversible, alors :  $\det(x.A + B) = \det(A.(x.I + A^{-1}B)) = \det(A).\det(x.I + A^{-1}B)$  ; ce qui, d'après la démonstration faite à l'exercice précédent, est un polynôme dont le terme de plus haut degré est :  $\det(A).x^n$  (car  $\det(A) \neq 0$ ).

- Si  $A$  n'est pas inversible, soit  $\text{rg}(A) = m$  ; alors  $A$  est semblable à une matrice  $A'$  dont les  $n - m$  dernières colonnes sont nulles, soit  $A = P.A'.P^{-1}$ , et on note  $B' = P^{-1}B.P$  ; alors :

$$\det(x.A + B) = \det(x.P.A'.P^{-1} + P.B'.P^{-1}) = \det(P.(x.A' + B').P^{-1}) = \det(x.A' + B').$$

Soit  $K = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  ; on note alors  $u_1, u_2, \dots, u_n$  les vecteurs dont les composantes dans  $K$  sont les colonnes de  $A'$ , donc  $u_{m+1}$  à  $u_n$  sont nuls, et  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ceux correspondant à  $B'$ . Alors :

$$\det(x.A' + B') = \det_K(x.u_1 + v_1, x.u_2 + v_2, \dots, x.u_m + v_m, v_{m+1}, \dots, v_n).$$

Si  $(v_{m+1}, \dots, v_n)$  est liée, alors le déterminant est nul, ce qui est bien un polynôme de degré strictement inférieur à  $n$ , et même à  $m$ .

On suppose ensuite que la famille  $(v_{m+1}, \dots, v_n)$  est libre, et on la complète pour former une nouvelle base  $K'$ , en réordonnant  $K$  pour avoir  $K' = (e_1, e_2, \dots, e_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ . Le fait d'exprimer le déterminant initial dans cette nouvelle base ne fait que le multiplier par une constante scalaire non nulle et ne change pas le degré du polynôme :  $\det_K(x.u_1 + v_1, x.u_2 + v_2, \dots, x.u_m + v_m, v_{m+1}, \dots, v_n) = \det_{K'}(K).\det(x.A' + B')$ .

Soit  $u'_i$  et  $v'_i$  les vecteurs de  $\mathbb{R}^m$  ayant les mêmes composantes, dans la base canonique  $K''$  de  $\mathbb{R}^m$ , que les  $m$  premières composantes respectives de  $u_i$  et  $v_i$  dans  $K'$ . Alors, en développant successivement de la  $n$ -ième à la  $(m + 1)$ -ième colonne le déterminant  $\det_K(x.u_1 + v_1, x.u_2 + v_2, \dots, x.u_m + v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ , on obtient :

$$\det_K(x.u_1 + v_1, x.u_2 + v_2, \dots, x.u_m + v_m, v_{m+1}, \dots, v_n) = \det_{K''}(x.u'_1 + v'_1, x.u'_2 + v'_2, \dots, x.u'_m + v'_m), \text{ où ce dernier déterminant est d'ordre } m.$$

En notant  $A''$  et  $B''$ , les matrices d'ordre  $m$  dont les colonnes sont les composantes respectives de  $u'_1, u'_2, \dots, u'_m$ , et  $v'_1, v'_2, \dots, v'_m$ , alors :  $\det_{K''}(x.u'_1 + v'_1, x.u'_2 + v'_2, \dots, x.u'_m + v'_m) = \det(x.A'' + B'')$ , sauf que, cette fois-ci,  $A''$  est de rang  $m$ , donc inversible. Ce qui prouve que  $\det(x.A + B)$  est un polynôme de degré  $m = \text{rg}(A)$ .

En ce qui concerne la proposition initiale, il y a double implication donc équivalence ; mais on a démontré mieux : **Soit  $\det(x.A + B)$  est nul, soit c'est un polynôme de degré  $\text{rg}(A)$ , comme c'est le cas, par exemple, si  $A$  est inversible.**

- Si  $B = 0$  :  $\det(x.A) = x^n.\det(A)$  ; ici le degré est  $n$  ou  $-\infty$ .

•  $f(x) = \det(x.A + B) = \det(g(x)) = h(g(x))$ , donc :  $f = h \circ g$ .

$$\bullet f(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} ; \text{ on peut utiliser le résultat de l'exercice G1.4, ou refaire le calcul :}$$

Soit  $u = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ , alors :  $f(x) = \det(u + x.e_1, u + x.e_2, \dots, u + x.e_n)$ , qu'on développe par multilinéarité, où dès que deux arguments valent  $u$ , le déterminant obtenu est nul ; il reste donc :

$$f(x) = x^n.\det(B) + \sum_{k=1}^n x^{n-1}.\det(e_1, \dots, e_{k-1}, u, e_{k+1}, \dots, e_n) = x^n + n.x^{n-1}. \text{ Ainsi : } f'(x) = n.x^{n-1} + n(n-1).x^{n-2}.$$

- **Formule de composition** :  $g$  est une fonction vectorielle qui se dérive normalement, de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , tandis que  $h$  est plus difficile à manipuler, allant de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans  $\mathbb{R}$ . On peut donc noter, pour pouvoir écrire la formule :

$h(x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}, x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n}, \dots, \dots, \dots, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n})$ , en écrivant les lignes de la matrice côte à côte,

Et :  $f(x) = (x_{1,1}(x), x_{1,2}(x), \dots, x_{1,n}(x), x_{2,1}(x), x_{2,2}(x), \dots, x_{2,n}(x), \dots, \dots, \dots, x_{n,1}(x), x_{n,2}(x), \dots, x_{n,n}(x))$ . Alors :

