

G) TD : Déterminants.

G1.1) Calculer : (le but est évidemment de faire le moins de calculs possibles)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & \sin(a) & \cos(a) \\ 1 & \sin(b) & \cos(b) \\ 1 & \sin(c) & \cos(c) \end{vmatrix}.$$

G1.2) Montrer sans le calculer que ce déterminant est divisible par 13 : $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ (13 divise 169, 273 et 546).

G1.3) Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos(c) & \cos(b) \\ 1 & \cos(c) & 1 & \cos(a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(a) & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 32 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ -32 & -3 & 0 & 32 & 4 \\ -1 & -4 & -32 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -4 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

G1.4) Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \quad (2n \text{ lignes}); \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+x_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \dots & a_n+x_n \end{vmatrix}.$$

G2.1) Soit $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y_n = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, et $J_n = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$. Calculer les déterminants suivants, pour $n \geq 3$: $\Delta_n = \det({}^t X_n Y_n)$ et $\Delta'_n = \det({}^t X_n Y_n + {}^t J_n J_n)$. (X_n, Y_n et J_n sont des matrices lignes).

G2.2) Étant donnée M une matrice à coefficients complexes ayant n colonnes C_1, C_2, \dots, C_n , on définit les colonnes : $B_j = \sum_{k \neq j} C_k$, et soit N la matrice formée de ces n nouvelles colonnes. Exprimer $\det(N)$ en fonction de $\det(M)$. (Trouver une expression plus simple de B_j).

G2.3) Étant donné un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-2$, calculer :

$$\begin{vmatrix} P(x+1) & P(x+2) & \dots & P(x+n) \\ P(x+2) & P(x+3) & \dots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & \dots & P(x+2n-1) \end{vmatrix}. \text{ En déduire : } \begin{vmatrix} 1 & 2^p & \dots & n^p \\ 2^p & 3^p & \dots & (n+1)^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^p & (n+1)^p & \dots & (2n-1)^p \end{vmatrix} \quad (\text{pour } p \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket).$$

(Le degré de P est très important).

G2.4) Étant donnée M une matrice à coefficients complexes non inversible. Montrer que $P(x) = \det(M + x.I)$ est un polynôme de degré n (où n est la dimension de la matrice carrée M). En déduire qu'il existe un réel $a > 0$ tel que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, 0 < |\varepsilon| < a \Rightarrow \det(M + \varepsilon.I) \neq 0$. (Donc : $M + \varepsilon.I$ inversible).

G2.5) Étant données deux matrices carrées de même dimension A et B , soit alors la fonction numérique réelle f définie par : $f(x) = \det(x.A + B)$.

Montrer que f est un polynôme de degré n si et seulement si A est inversible. Illustrer cette propriété dans le cas particulier $B = 0$. (Plus rapide si on a préalablement résolu la première question du G2.4).

Soit les fonctions g et h définies par : $g(x) = x.A + B$ et $h(M) = \det(M)$ (M matrice carrée). Dans quel sens f est-elle la composée des deux ?

Dans le cas où A est la matrice ne contenant que des « 1 » et $B = I$, calculer la dérivée de f directement puis en utilisant la différentielle d'une fonction composée. (Montrer que dans le cas $n = 2$ on a $\det(u, v)' = \det(u', v) + \det(u, v')$).