

H1) TD : Réduction des endomorphismes (première partie).

H1.1) En notant Q le polynôme caractéristique vérifier que $Q(M) = 0$ et calculer M^n pour $M = :$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

- *Corrigé* : • $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -5-\lambda & 6 \\ 3 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(1-\lambda)^2(2+\lambda) \quad (= -\lambda^3 + 3\lambda - 2).$

$$E_2: (x=0, y=2z) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right); E_1: (x-y+z=0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right); P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+(-2)^{n+1} & -1-(-2)^{n+1} & 2+(-2)^{n+1} \\ 1-(-2)^n & -1+(-2)^n & 2-(-2)^n \end{pmatrix}.$$

$$Q(M) = -\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\right)^2 \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais plus simplement :

$$Q(M) = -M^3 + 3M - 2I = -PD^3P^{-1} + 3.PDP^{-1} - 2.PIP^{-1} = P.Q(D).P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} Q(-2) & 0 & 0 \\ 0 & Q(1) & 0 \\ 0 & 0 & Q(1) \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \Theta.$$

(Cette propriété s'appelle : Théorème de Cayley-Hamilton, elle est très simple à démontrer pour une matrice diagonalisable, mais elle reste vraie dans le cas général).

• $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15 = (5-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)$ (car 1 est racine évidente).

$$E_3: (x = -2y, z = 3y) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right); E_3: (x = -2z, y = z) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right); E_1: (x = -2z, y = 3z) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; P^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 5^n + 2 \cdot 3^n - \frac{1}{2} & 3^n - 1 & -5^n + 3^n \\ \frac{1}{4} \cdot 5^n - 3^n + \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} \cdot 3^n \\ \frac{3}{4} \cdot 5^n - 3^n + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} \cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

$$Q(M) = P.Q(D).P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} Q(5) & 0 & 0 \\ 0 & Q(3) & 0 \\ 0 & 0 & Q(1) \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \Theta.$$

• $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & -10 \\ 1 & 4-\lambda & -4 \\ 1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3$; $E_2: (x=0, y+z=0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$; elle n'est pas diagonalisable.

Elle est trigonalisable (polynôme caractéristique scindé), la matrice triangulaire ayant sa diagonale égale à 2.

En notant f l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , on cherche une base $B' = (u, v, w)$

telle que $u: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(v) = \alpha \cdot u + 2v$, $f(w) = \beta \cdot v + 2w$. Alors : (on va trouver $T = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ d'où : } \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 6x + 2y + 2z = \alpha \\ -10x - 4y - 4z = -\alpha \end{cases}, \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} x = \alpha/2 \\ y + z = -\alpha \end{cases}.$$

Par exemple, pour $\alpha = 2$: $v: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Seul $\alpha = 0$ est interdit).

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ d'où : } \begin{cases} 2x + y + z = \beta \\ 6x + 2y + 2z = -2\beta \\ -10x - 4y - 4z = 0 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} x = -2\beta \\ y + z = 5\beta \end{cases}.$$

Par exemple, pour $\beta = -1$: $w: \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I + S, \text{ où } S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ vérifie } S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S^3 = \Theta; P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc : } T^n = (S + 2I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot S^k = 2^n \cdot I + n \cdot 2^{n-1} \cdot S + n(n-1) \cdot 2^{n-3} \cdot S^2 = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^n & (1-n)n \cdot 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & -n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$M^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^n & (1-n)n \cdot 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & -n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} 4(n+1) & 2n & 2n \\ 2n(n+5) & n^2 + 3n + 4 & n(n+3) \\ -2n(n+9) & -n(n+7) & -n^2 - 7n + 4 \end{pmatrix}.$$

$$Q(M) = PQ(T)P^{-1} = P(2I - T)^3P^{-1} = -PS^3P^{-1} = \Theta.$$

H1.2) Déterminer les éléments propres de : $\begin{pmatrix} 2a^2 - 1 & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2b^2 - 1 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2 - 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- *Corrigé* : $\bullet \begin{vmatrix} 2a^2 - 1 - \lambda & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2b^2 - 1 - \lambda & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2 - 1 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = (\lambda + 1)^2(2(a^2 + b^2 + c^2) - 1 - \lambda).$

$$E^{-1}: (ax + by + cz = 0) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right); E_{2a^2+2b^2+2c^2+1} = \dots = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right).$$

$$P = \begin{pmatrix} -b & -c & a \\ a & 0 & b \\ 0 & a & c \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(a^2+b^2+c^2)+1 \end{pmatrix}; P^{-1} = \frac{1}{a(a^2+b^2+c^2)} \begin{pmatrix} -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \\ a^2 & ab & ac \end{pmatrix}.$$

$\bullet \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b & c \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \dots = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2.$

$$E_2: \{-x_1 + bx_3 + cx_4 = 0, x_2 = 0\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$E_1: \{(a - b + c)x_4 = 0, x_4 = x_2, x_3 = -x_2\}.$$

- Si $a - b + c = 0$: $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right); P = \begin{pmatrix} b & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & c-b & -b & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

- Si $a - b + c \neq 0$: $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$; la matrice n'est pas diagonalisable. On cherche un quatrième vecteur tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire : } \{x_3 = -x_2, x_4 = x_2, (a - b + c)x_2 = \alpha \text{ (où } \alpha \neq 0)\}.$$

Par exemple : $\alpha = a - b + c$, et alors : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient ; $P = \begin{pmatrix} b & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-b+c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & c-b & -b & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

H1.3) Déterminer les éléments propres de $M = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ telle que : $a_{i,j} = i \cdot j^2$.

- *Corrigé* : $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 \\ 2 & 8 & 18 & \dots & 2n^2 \\ 3 & 12 & 27 & \dots & 3n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 4n & 9n & \dots & n \cdot n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 \end{pmatrix}.$

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, et f l'endomorphisme de matrice M , ainsi que l'hyperplan $H: (x_1 + 4x_2 + 9x_3 + \dots + n^2x_n = 0)$; alors : $\forall u \in H, f(u) = 0_E$. Il en résulte que 0 est valeur propre d'ordre $n - 1$ (pas n car M n'est pas la matrice nulle).

Par ailleurs : en notant $v = e_1 + 2.e_2 + 3.e_3 + \dots + n.e_n$, alors : $f(v) = (\sum_{k=1}^n k^3).v = \frac{1}{4}.n^2(n+1)^2.v$; ce qui signifie que v est vecteur propre pour la valeur propre $\frac{1}{4}.n^2(n+1)^2$.

Conclusion : 0 est valeur propre d'ordre $n-1$ pour le sous-espace propre H , $\frac{1}{4}.n^2(n+1)^2$ est valeur propre d'ordre 1 pour le sous-espace propre $\text{Vect}(v)$.

- *Remarque* : En notant $w = e_1 + 4.e_2 + 9.e_3 + \dots + n^2.e_n$, et en assimilant les vecteurs à leur matrice colonne dans B , alors : $M = v \times^t w$, ce dont on déduit : $f(v) = M.v = (v \times^t w).v = v.({}^t w \times v) = ({}^t w \times v).v$.

De même, si on cherche un vecteur x du noyau de f , alors : $f(x) = M.x = (v \times^t w).x = v.({}^t w \times x) = ({}^t w \times x).v = 0_E$, ce dont on déduit : $\text{Ker}(f) : ({}^t w \times x = 0)$.

H1.4) Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $f(P) = (X-a)P'$ est un endomorphisme et déterminer ses éléments propres.

- *Corrigé* : $(X-a)P'$ est bien un polynôme, qui plus est de même degré que P , $\mathbb{R}_n[X]$ est donc stable.

On vérifie ensuite très facilement que $f(\alpha.P + \beta.Q) = \alpha.f(P) + \beta.f(Q)$.

On cherche un polynôme non nul P et un réel λ tels que : $f(P) = \lambda.P$, c'est-à-dire : $(X-a)P' = \lambda.P$, ce qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre, $P' = \frac{\lambda}{X-a}.P$, dont la solution est : $P = k.(X-a)^\lambda$ où $k \in \mathbb{R}$. Il est donc nécessaire et suffisant que : $\lambda \in \mathbb{N}$.

Conclusion : Les valeurs propres sont tous les entiers naturels et, pour $n \in \mathbb{N}$: $E_n = \text{Vect}((X-a)^n)$.

H1.5) Donner les matrices T triangulaires telles que : $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. Soit T l'une des matrices triangulaires

solution, et M une solution quelconque, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$, t et f les endomorphismes de E de matrices respectives T et M dans B . Vérifier que t est bijective, et soit alors : $g = t^{-1} \circ f$. Étant donné un vecteur u quelconque de E , montrer qu'il existe un vecteur v de $\text{Ker}(f-t)$ et un vecteur w de $\text{Ker}(f+t)$ tels que $t(u) = v + w$. En déduire que $\text{Ker}(f-t)$ et $\text{Ker}(f+t)$ sont supplémentaires. Montrer que -1 et 1 sont valeurs propres de g et que les sous-espaces propres associés, E_{-1} et E_1 , sont supplémentaires. Montrer qu'il existe une matrice inversible Q telle que : $M = TQ$, où Q vérifie : $QTQ = T$.

- *Corrigé* : • Il est évident que T doit être triangulaire inférieure (sinon T^2 serait triangulaire supérieure). Soit alors :

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \text{ et } T^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ b_1(a+b_2) & b_2^2 & 0 \\ b_1c_2 + c_1(a+c_3) & c_2(b_2+c_3) & c_3^2 \end{pmatrix}.$$

- *Résolution directe* : $a = \pm 1, b_2 = \pm 2, c_3 = \pm 3$.

Pour trouver b_1 : $b_1(a+b_2) = 1 \rightarrow (a, b_1, b_2) \in \{(-1, -\frac{1}{3}, -2), (-1, 1, 2), (1, -1, -2), (1, \frac{1}{3}, 2)\}$.

Pour trouver c_2 : $c_2(b_2+c_3) = 1 \rightarrow (b_2, c_2, c_3) \in \{(-2, -\frac{1}{5}, -3), (-2, 1, 3), (2, -1, -3), (2, \frac{1}{5}, 3)\}$.

Pour trouver c_1 , on recoupe ces deux ensembles avec la dernière équation : $b_1c_2 + c_1(a+c_3) = 2 \rightarrow$

$$(a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3) \in \{(-1, -\frac{1}{3}, -2, \frac{-29}{60}, -\frac{1}{5}, -3), (-1, -\frac{1}{3}, -2, \frac{7}{6}, 1, 3), (-1, 1, 2, \frac{-3}{4}, -1, -3), (-1, 1, 2, \frac{9}{10}, \frac{1}{5}, 3),$$

$$(1, -1, -2, \frac{-9}{10}, -\frac{1}{5}, -3), (1, -1, -2, \frac{3}{4}, 1, 3), (1, \frac{1}{3}, 2, \frac{-7}{6}, -1, -3), (1, \frac{1}{3}, 2, \frac{29}{60}, \frac{1}{5}, 3)\}.$$

$$\text{Solutions } T : \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2 & 0 \\ 29/60 & 1/5 & 3 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2 & 0 \\ -7/6 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3/4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 9/10 & 1/5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- *En diagonalisant T^2* : $E_1 : (x+3y=0, 2x+y+8z=0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -24 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$;

$E_4 : (x=0, y+5z=0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$; $E_9 : (x=y=0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$$P = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}; P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/24 & 0 & 0 \\ 1/15 & 1/5 & 0 \\ 11/40 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} \text{ (où } T^2 = PD^2P^{-1}\text{)}.$$

Il y a huit possibilités pour D , donnant quatre couples d'opposées pour T : $\pm P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2 & 0 \\ 29/60 & 1/5 & 3 \end{pmatrix}$;

$$\pm P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2 & 0 \\ -7/6 & -1 & -3 \end{pmatrix}; \pm P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3/4 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \pm P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 9/10 & 1/5 & 3 \end{pmatrix}.$$

• Soit $v = \frac{1}{2}(t - f)(u) \in \text{Ker}(f + t)$, et $w = \frac{1}{2}(f + t)(u) \in \text{Ker}(f - t)$; alors : $t(u) = v + w$.

• Soit T l'une de ces solutions, et M telle que $M^2 = T^2$, T est inversible car il n'y a pas de 0 dans la diagonale, donc t est bijective.

Soit $u \in \text{Ker}(f - t) \cap \text{Ker}(f + t)$, alors : $f(u) = t(u) = -t(u)$, donc $2t(u) = 0_E$, mais comme t est bijective, alors : $u = 0_E$. Donc : $\text{Ker}(f - t) \cap \text{Ker}(f + t) = \{0_E\}$.

Étant donné un vecteur quelconque $u \in E$, alors $(f - t)(u) \in \text{Ker}(f + t)$ car :

$$(f - t)((f + t)(u)) = f^2(u) - t^2(u) = 0_E \text{ (car } M^2 = T^2 \Rightarrow f^2 = t^2\text{)}.$$

De même $(f + t)(u) \in \text{Ker}(f - t)$; donc : $t(u) = \frac{1}{2}(f + t)(u) - \frac{1}{2}(f - t)(u)$ est dans : $\text{Ker}(f - t) + \text{Ker}(f + t)$, ce dont on déduit : $\text{Ker}(f - t) + \text{Ker}(f + t) = t(E) = E$ (car t est bijective).

Il s'en suit que ces deux sous-espaces sont supplémentaires : $\text{Ker}(f - t) \oplus \text{Ker}(f + t) = E$.

Soit un réel λ et un vecteur non nul u tels que : $g(u) = t^{-1} \circ f(u) = \lambda \cdot u$; alors : $f(u) = \lambda \cdot t(u)$;

-1 et 1 sont donc des valeurs propres de g , mais comme pour tout u de E , on a : $t(u) = \frac{1}{2}(f + t)(u) - \frac{1}{2}(f - t)(u)$, en composant à gauche par t^{-1} : $u = \frac{1}{2}(g + \text{id}_E)(u) - \frac{1}{2}(g - \text{id}_E)(u)$.

Il s'en suit que $E_{-1} + E_1 = E$; il n'y a donc pas d'autres valeurs propres.

En outre, si $u \in E_{-1} \cap E_1$, alors $g(u) = u = -u$, donc $u = 0_E$, et on a $E_{-1} \oplus E_1 = E$; ils sont bien supplémentaires.

En conséquence de quoi, il existe une matrice diagonale K , dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de g et valent -1 ou 1, et une matrice inversible P correspondant à la base des vecteurs propres, telles que : $T^{-1}M = PKP^{-1}$, donc : $M = TPKP^{-1} = TQ$, pour $Q = PKP^{-1}$.

Q est produit de matrices inversibles, donc inversible elle-même.

On a alors finalement : $(TQ)^2 = T^2$, donc : $TQTQ = T^2$, c'est-à-dire : $QTQ = T$.

H1.6) Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de valeurs propres : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Exprimer la somme des carrés : $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2$ en fonction des coefficients de M .

- *Corrigé* : Si M est symétrique réelle, alors elle est diagonalisable, donc : $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$.

Par suite : $M^2 = PD^2P^{-1}$, et : $\text{Tr}(M^2) = \text{Tr}(D^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2$.

En outre, en notant $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 4}}$, alors $\text{Tr}(M^2) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}a_{ji} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^2$ (car M est symétrique : $a_{ij} = a_{ji}$, et il s'agit du produit scalaire canonique $(M|N) = \text{tr}(MN)$).