

H2) TD : Réduction des endomorphismes (deuxième partie).

H2.1) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation : $M^2 + M - 2I = 0$; montrer qu'elle est diagonalisable.

- *Corrigé* : $M^2 + M - 2I = (M - I)(M + 2I) = (M + 2I)(M - I) = 0$.

Soit f l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$, alors :

Soit $u \in \text{Ker}(f - \text{id}_E) \cap \text{Ker}(f + 2.\text{id}_E)$, on a : $f(u) = u = -2u \Rightarrow u = 0_E$, donc : $\text{Ker}(f - \text{id}_E) \cap \text{Ker}(f + 2.\text{id}_E) = \{0_E\}$.

Par ailleurs, pour tout $u \in E$, $(f - \text{id}_E)(u) \in \text{Ker}(f + 2.\text{id}_E)$ car $(f + 2.\text{id}_E)((f - \text{id}_E)(u)) = (f^2 + f - 2.\text{id}_E)(u) = 0_E$; de même : $(f + 2.\text{id}_E)(u) \in \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.

Et comme : $u = \frac{1}{3}(f + 2.\text{id}_E)(u) - \frac{1}{3}(f - \text{id}_E)(u)$, donc : $\text{Ker}(f - \text{id}_E) + \text{Ker}(f + 2.\text{id}_E) = E$.

Par suite, ils sont supplémentaires : $\text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 2.\text{id}_E) = E$.

En conséquence de quoi il existe une base de vecteurs de $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(f + 2.\text{id}_E)$, c'est-à-dire une base de vecteurs propres. Ainsi : M est diagonalisable.

H2.2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$; donner le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A .

- *Corrigé* : Soit $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I_n)$ et $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda.I_{2n})$. On a : $P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} A - \lambda.I_n & A \\ A & A - \lambda.I_n \end{vmatrix}$.

On applique la méthode du pivot de Gauss avec : $\{L_{n+i} - L_i \rightarrow L_{n+i}, n+1 \leq i \leq 2n\} \rightarrow$

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} A - \lambda.I_n & A \\ \lambda.I_n & -\lambda.I_n \end{vmatrix} = \lambda^n \cdot \begin{vmatrix} A - \lambda.I_n & A \\ I_n & -I_n \end{vmatrix} \quad (\text{car on met } \lambda \text{ en facteur dans } n \text{ lignes}).$$

On fait ensuite : $\{C_i + C_{n+i} \rightarrow C_i, 1 \leq i \leq n\} \rightarrow$

$$P_B(\lambda) = \lambda^n \cdot \begin{vmatrix} 2A - \lambda.I_n & A \\ \Theta & -I_n \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n \cdot \begin{vmatrix} 2A - \lambda.I_n & A \\ \Theta & I_n \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n \cdot \det(2A - \lambda.I_n) \quad (\text{déterminant triangulaire par blocs}).$$

Finalement : $P_B(\lambda) = (-1)^n 2^n \lambda^n \cdot \det(A - \frac{\lambda}{2}.I_n) = (-2\lambda)^n \cdot P_A(\frac{\lambda}{2})$.

H2.3) Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telle que $\text{tr}(M) \neq 0$ et M^2 diagonalisable avec des valeurs propres positives. Montrer que M est diagonalisable. Que se passe-t-il si $\text{tr}(M) = 0$?

- *Corrigé* : Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; alors : $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \text{tr}(M).M - \det(M).I$.

On note $t = \text{tr}(M)$ et $\delta = \det(M)$, $P_2(\lambda) = \det(M^2 - \lambda.I)$, qui est scindé dans \mathbb{R} , $P_1(\lambda) = \det(M - \lambda.I)$.

Alors : $\det(M^2 - \lambda.I) = \det(t.M - (\lambda + \delta).I)$.

• Si $t \neq 0$, en notant $\mu = \frac{\lambda + \delta}{t}$: $P_2(\lambda) = \det(M^2 - \lambda.I) = t^2 \cdot \det(M - \mu.I) = t^2 \cdot P_1(\mu)$. Il en résulte que P_1 est scindé dans \mathbb{R} . En outre, si P_2 admet deux racines réelles distinctes, il en est de même de P_1 , donc : Si M^2 admet deux valeurs propres distinctes, il en est de même de M .

Si, au contraire, P_2 est un carré, alors M^2 admet une unique valeur propre α ; donc : $M^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, et ainsi : $a^2 + bc = d^2 + bc = \alpha$, $b(a+d) = c(a+d) = 0$. D'où : $a^2 - d^2 = 0$.

Comme $a+d \neq 0$, on en déduit : $a-d = b=c=0$ donc : $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ est déjà diagonale.

• Si $\text{tr}(M) = t = 0$: Alors $M^2 = -\delta.I$ est diagonale, et comme les valeurs propres de M^2 sont positive, alors : $\text{tr}(M^2) = -2\delta \geq 0$ (où $\delta = ad - bc = -a^2 - bc$).

En outre : $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}$, donc : $\det(M - \lambda.I) = \lambda^2 - a^2 - bc = \lambda^2 + \delta$; et comme $\delta \leq 0$, il faut distinguer les deux cas suivants :

- Si $\delta \neq 0$: Le polynôme caractéristique de M admet deux racines réelles distinctes, donc M est diagonalisable.
- Si $\delta = 0$: M admet la valeur propre double 0 ; il s'en suit que si M est diagonalisable, c'est la matrice nulle. Il s'en suit que si M n'est pas nulle, elle n'est pas diagonalisable.

H2.4) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) et une matrice B telles que pour tout

entier naturel n on ait : $A^n = u_n.A + v_n.I$, et : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. En déduire l'expression de A^n . (Cette méthode ne fonctionne qu'avec certaines matrices ; on pourra faire l'exercice avec la méthode générale consistant à diagonaliser A pour la comparer avec cette méthode).

- *Corrigé* : On détermine assez facilement les premiers termes de ces deux suites :

$$u_0 = 0, v_0 = 1, u_1 = 1, v_1 = 0, u_2 = 4, v_2 = -3.$$

Par suite : $A^{n+1} = u_{n+1}.A + v_{n+1}.I = A.A^n = A.(u_n.A + v_n.I) = u_n.A^2 + v_n.A = u_n.(u_2.A + v_2.I) + v_n.A = u_n.(4A - 3I) + v_n.A = (4u_n + v_n).A - 3u_n.I \Rightarrow \{u_{n+1} = 4u_n + v_n, v_{n+1} = -3u_n\}$, donc :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

$$\det(B - \lambda.I) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

On obtient : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, d'où : $B^n = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1+3^{n+1} & -1+3^n \\ 3-3^{n+1} & 3-3^n \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1+3^{n+1} & -1+3^n \\ 3-3^{n+1} & 3-3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3^n - 1 \\ 3 - 3^n \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$A^n = u_n.A + v_n.I = \frac{1}{2} \cdot ((3^n - 1).A + (3 - 3^n).I) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n & -1+3^n \\ -3+3^{n+1} & 5-3^{n+1} & -3+3^{n+1} \\ -4+4.3^n & 4-4.3^n & -2+4.3^n \end{pmatrix}.$$

- *Autre méthode* : $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (1 - \lambda)^2(3 - \lambda)$.

$$E_1: (x - y + z = 0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right); E_3: (y = 3x, z = 4x) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right).$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; P^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3^n \\ 1 & 0 & 3^{n+1} \\ 0 & -1 & 4.3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n & -1+3^n \\ -3+3^{n+1} & 5-3^{n+1} & -3+3^{n+1} \\ -4+4.3^n & 4-4.3^n & -2+4.3^n \end{pmatrix} = u_n.A + v_n.I.$$

$$\text{Donc : } u_n = \frac{1}{2} \cdot (3^n - 1), v_n = \frac{1}{2} \cdot (3 - 3^n).$$

H2.5) Trouver les deux fonctions x et y de la variable t , dérivables, telles que : $\{x' = x + 2y, y' = 3x - 4y\}$.

- *Corrigé* : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$.

$$E_2: (x - 2y = 0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right); E_{-5}: (3x + y = 0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right); P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ d'où : } u = a.e^{2t}, v = b.e^{-5t}, (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\text{Finalement : } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ donc : } \begin{cases} x = 2a.e^{2t} + b.e^{-5t} \\ y = a.e^{2t} - 3b.e^{-5t} \end{cases} (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$