TD17 : Référentiels Non Galiléens

Exercice 1 : Ascenseur en translation verticale

On considère un ascenseur A en translation verticale par rapport au sol $\Re = \left(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$, avec une accélération $\overrightarrow{a_{A/\Re}}$ constante. Un passager lâche une pomme considérée comme un point de masse m sans vitesse initiale.

1. Quel sera le mouvement de la masse m dans l'ascenseur (Appliquer le PFD dans R') ?
2. Que se passe-t-il dans le cas où $\overrightarrow{a_{A/\Re}} = \vec{g}$? Interpréter le phénomène.

Exercice 2 : Champ de Pesanteur

La Terre est assimilable à une boule sphérique de centre O, de masse $M_T = 6.10^{24}$ kg et de rayon $R_T = 6400$km, tournant autour de son axe avec une vitesse angulaire de $7{,}3.10^{-5}$ rad.s^{-1}. On considère un repère tournant avec la Terre $\Re' = \left(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$. Un point M, de masse m, est immobile dans $\Re'$ à une latitude λ = 48°. Ce point est soumis à son poids et des forces $\overrightarrow{F_{ext}}$ de nature non gravitationnelles. Ainsi, on a $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} + \vec{P} = \vec{0}$ (PFS dans $\Re$).

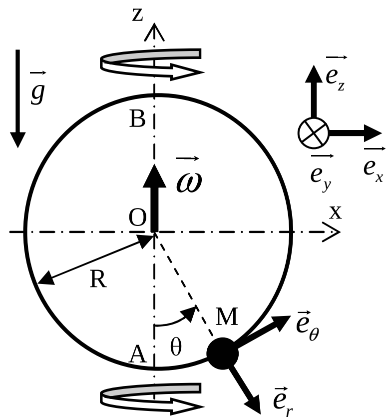
1. Donner l'expression de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_{grav}}$ exercée par la terre sur M. On définit également le champ gravitationnel $\overrightarrow{G_{M_T}}$ de la Terre tel que $\overrightarrow{F_{grav}} = m \cdot \overrightarrow{G_{M_T}}$.
2. Ecrire la condition d'équilibre de la masse m dans $\Re'$.
3. En déduire la relation vectorielle : $\vec{g} = \overrightarrow{G_{M_T}} + \omega^2 \overrightarrow{HM}$, et commenter.
4. Exprimer numériquement $\vec{g}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{e_r}$ et $\vec{e_x}$.

Exercice 3 : Force de Coriolis et Chute libre

On lâche une bille de masse m sans vitesse initiale d'un point de latitude λ = 40°. On suppose que le champ de pesanteur est uniforme (avec g = 9.81m.s^{-2}) et on néglige les frottements. On utilise une base cartésienne $\left(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$ avec O le point de départ de la bille, Oz est vertical vers le haut, Ox horizontal vers l'est et Oy horizontal vers le nord. On note Ω le vecteur rotation de la terre.

1. Dans le cas où la force de Coriolis $\overrightarrow{F_{ic}}$ est négligée, exprimer les composantes de la vitesse $\vec{v}$ de la bille.
2. L'effet de $\overrightarrow{F_{ic}}$ étant faible, La vitesse réelle reste voisine de celle trouvée au 1. Déterminer les composantes de $\overrightarrow{F_{ic}}$ en utilisant cette expression approchée de $\vec{v}$.
3. En déduire les équations vérifiées par x(t), y(t) et z(t) dans le cadre de cette approximation.
4. Exprimer x(t), y(t) et z(t). En déduire le sens de la déviation due à $\overrightarrow{F_{ic}}$ et la calculer pour une chute de h = 150m.

Exercice 4 : Cercle en Rotation



Un guide circulaire de centre O et de rayon R est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e_z}$ autour de son diamètre vertical ($\omega = \dot{\varphi} > 0$). Un anneau M, assimilé à un point matériel de masse m, coulisse sans frottement sur la circonférence. Son mouvement est repéré par un seul degré de liberté cinématique : l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$ compté positivement dans le sens indiqué sur le schéma ci-contre.

Le référentiel d'étude est le référentiel tournant $\Re_C$ lié au cercle, et dont le repère $\left(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$ attaché rigidement au cercle est en rotation d'angle φ autour de l'axe vertical (Oz) du référentiel terrestre $\Re_G$ supposé galiléen.

Utilisation du PFD :

1. Exprimer la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{ie}}$ en fonction θ, m, r, ω et de $\vec{e_x}$.
2. Exprimer la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{F_{ic}}$ en fonction de θ, $\dot{\theta}$, m, r, ω et de $\vec{e_y}$.
3. Ecrire la RFD dans $\Re_C$ et déduire de sa projection suivant $\vec{e_\theta}$ l'équation différentielle vérifiée par θ. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme : $r\ddot{\theta} = f(\theta)$, où $f(\theta)$ est à exprimer en fonction de θ, g, r, et ω.

Utilisation du TMC :

4. Définir et exprimer le moment cinétique en O du point M en mouvement dans $\Re_C$.
5. Appliquer le TMC en O et retrouver l'équation du mouvement et l'expression de $f(\theta)$

Utilisation de l'énergie mécanique :

6. On donne l'expression de l'énergie potentielle d'entraînement (force centrifuge) $E_P^{centrifuge} = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \sin^2\theta$. Montrer que $\overrightarrow{F_{ie}}$ dérive bien de cette énergie potentielle.

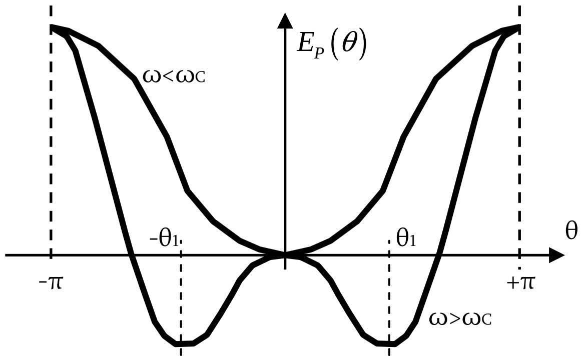
7. Déterminer l'énergie potentielle E_P^{pes} dont dérive le poids de M en fonction de θ, en choisissant l'état de référence $E_P^{pes}(\theta = 0) = 0$.

8. Montrer que la réaction du guide $\vec{R}$ et la force d'inertie de Coriolis $\vec{F_{ic}}$ ne travaillent pas.

9. Déduire de ce qui précède que l'énergie potentielle totale peut se mettre sous la forme : $E_P(\theta) = K\left[1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2 \sin^2\theta\right]$. Déterminer K et ω_C en fonction de m, g et r.

10. Le tracé de l'énergie potentielle totale de M en fonction de θ fait apparaître deux cas. Par une rapide analyse de ces deux courbes, commencer à prévoir les positions d'équilibre possibles de l'anneau dans $\Re_C$. Discuter de leurs conditions d'existence et de stabilité.

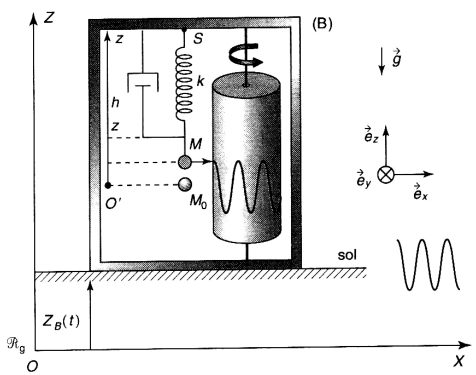
11. Ecrire la conservation de l'énergie mécanique en la justifiant et retrouver l'équation différentielle du mouvement.



Exercice 5 : Sismographe à ressort

Le sismographe est un instrument chargé d'enregistrer les mouvements vibratoires de l'écorce terrestre. Son principe est représenté sur la figure ci-contre.

Il est constitué d'un ressort (de masse négligeable, constante de raideur k et longueur au repos l_0) dont l'extrémité supérieure S est fixée au boîtier rigide (B) de l'instrument qui repose sur le sol, et dont l'extrémité inférieure est accrochée à un point matériel M de masse m.



La position de M est repérée par sa cote z(t) sur l'axe (O'z) fixe par rapport au boîtier. L'origine O' de cet axe correspond à la position d'équilibre du point matériel en l'absence d'onde sismique. Le mouvement de M est aussi amorti par la force de frottement fluide $\vec{F_f} = -h \cdot \vec{v}_{(M/\Re_B)} = -h\dot{z}\vec{e_z}$ avec h > 0.

Lorsque le sol est localement mis en mouvement sous l'effet de secousses sismiques, le référentiel du boîtier R_B est animé, par rapport au référentiel terrestre galiléen $\Re_G = (O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, d'un mouvement vertical représenté par la fonction $Z_B(t)$. La réponse du sismographe est caractérisée par la fonction z(t) que l'on enregistre à l'aide d'un marqueur.

1) En l'absence d'onde sismique, le point matériel est immobile et z(t) = 0. Exprimer la longueur l_{eq} du ressort en fonction de m, g, k et l_0.

2) En présence d'une onde sismique sinusoïdale de pulsation ω, le boîtier est animé d'un mouvement du type : $Z_B(t) = Z_0 \cos(\omega t)$.

Montrer que l'équa diff du mouvement de M dans le référentiel du boîtier peut se mettre sous la forme : $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\sqrt{2}}{\tau}\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = -\frac{d^2 Z_B}{dt^2}$. Que représente τ ?

3) En régime sinusoïdal établi, la réponse de l'oscillateur est de la forme $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$. En utilisant la notation complexe, établir l'expression de la fonction de transfert mécanique : $\underline{H} = \frac{\underline{z}}{\underline{Z_B}}$

4) En supposant que $\tau\omega_0 = 1$, montrer que : $\underline{H} = \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j\sqrt{2}\frac{\omega_0}{\omega}}$.

En déduire le module ou gain du filtre $G = |\underline{H}| = \frac{Z_m}{Z_0}$ et l'argument φ de la fonction de transfert. Examiner les cas limites $\omega_0 \gg \omega$ et $\omega_0 \ll \omega$

Déterminer le facteur de qualité Q du filtre. Commentez le comportement en fréquence du sismographe et préciser la nature du filtre. Dans quel cas le mouvement relatif de M reproduit-il l'amplitude de la secousse sismique ?