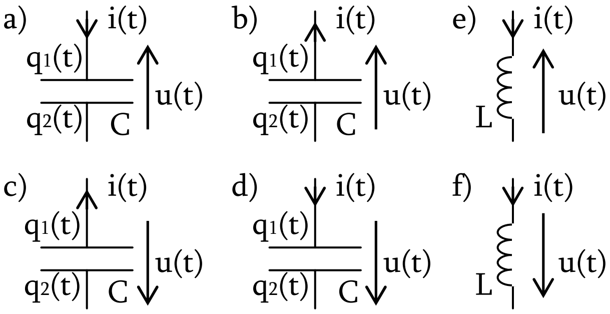
Supplément EXERCICES – EC3 – Régime Transitoire – 1/2

Echauffement

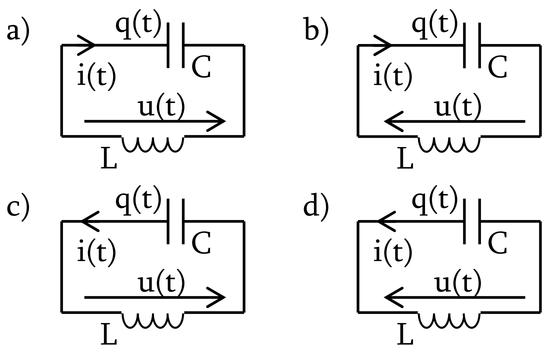
Exercice 1 : Conventions

Trouver la relation entre i, q_1, q_2 et u sur les schémas suivants:



Exercice 2 : Unicité d'une équation différentielle

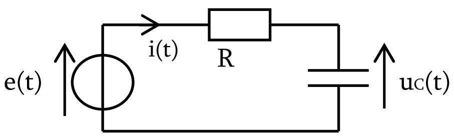
Dans chacun des cas représentés, exprimer i et u et montrer que, quelle que soit l'orientation des flèches de courant et de tension, la charge q vérifie la même équation différentielle : $\dfrac{d^2q}{dt^2}+\dfrac{q}{LC}=0$



1^er^ Ordre

Exercice 3 : Circuit RC – Cas général

Un condensateur est chargé d'une tension $u_C = E_1$, c'est-à-dire la valeur délivrée par le générateur pour $t < t_0$. A $t = t_0$, le générateur bascule à une valeur $e(t) = E_2$.



→ Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur pour $t > t_0$.

→ La résoudre, et déterminer l'évolution de la tension en fonction de E_1, de $\delta E = E_2 - E_1$, de t_0, et de $\tau = RC$.

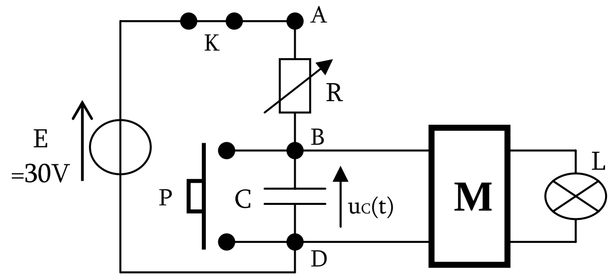
→ Déterminer l'évolution de i(t) pour $t > t_0$.

Exercice 4 : Fonctionnement d'une minuterie

On étudie le principe de fonctionnement d'une minuterie permettant d'éteindre une lampe automatiquement au bout d'une durée t_0 réglable.

Dans le montage suivant, on représente un composant M (à base d'AO en mode comparateur) qui permet l'allumage de la lampe L tant que la tension du condensateur est inférieure à une tension limite, notée U_{lim}, que l'on fixera à 20V. Le composant M possède une alimentation électrique propre (non représentée) qui lui fournit l'énergie nécessaire à l'allumage de la lampe. On admettra qu'il ne perturbe pas le fonctionnement du circuit RC.

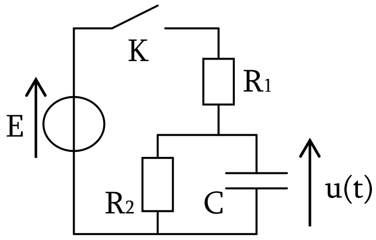
A l'instant initial, le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur K, le bouton poussoir P est relâché.



1. Etablir l'équation différentielle donnant les variations de $u_C(t)$ aux bornes du condensateur en fonction du temps.
2. Quelle est la valeur U_C de $u_C(t)$ en régime permanent (bouton poussoir relâché) ?
3. Résoudre l'équation différentielle précédente. On définira une constante de temps τ de cette équation.
4. Tracer le graphique de $u_C(t)$ en faisant apparaître la tension E, et la constante de temps τ.
5. Calculer la valeur de τ pour $R = 100k\Omega$ et $C = 200\mu F$.
6. Donner l'expression littérale de la date t_0 à laquelle la tension aux bornes du condensateur atteint la valeur limite U_{lim}, en fonction de U_{lim}, E et τ.
7. Calculer la valeur de t_0 et vérifier la validité du résultat à l'aide du graphe $u_C(t)$ tracé.
8. On a fixé $U_{lim} = 20V$ pour obtenir une durée d'allumage t_0 voisine de τ. Pour quelle raison choisir t_0 très supérieure à τ n'aurait-il pas été judicieux pour un tel montage ?
9. Quel paramètre du montage peut-on modifier sans changer le générateur afin d'augmenter la durée d'allumage de la lampe ? Quel est le plus simple ?

Exercice 5 : Résistance de fuite d'un condensateur

Le diélectrique d'un condensateur n'est pas un isolant parfait, et il existe de ce fait un courant de fuite. Un condensateur réel peut être modélisé par un condensateur idéal, en parallèle avec un résistor. On se propose ici d'étudier la charge d'un condensateur de capacité C et de résistance de fuite R_2, à travers un résistor R_1.

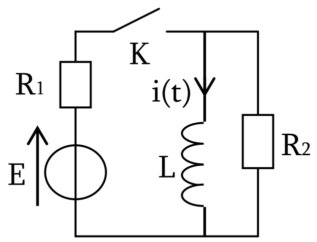


A t = 0, le condensateur est déchargé. Déterminer les expressions de la tenson u(t) aux bornes du condensateur et de l'intensité i(t) qui le traverse. La charge s'effectue à l'aide d'un générateur de tension continue de fém E.

Exercice 6 : Association L // R

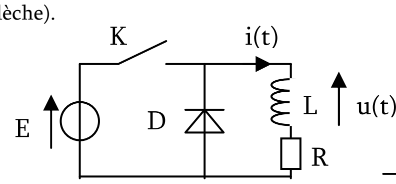
Le circuit étudié comporte un générateur de tension continue E, un interrupteur K, une bobine d'inductance L et deux résistors de résistance R_1 et R_2. A la date t = 0, on ferme l'interrupteur K.

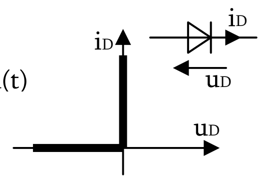
→ Etablir l'expression de l'intensité traversant la bobine.



Exercice 7 : Diode à diode dite de « Roue Libre »

On considère le montage ci-dessous. On donne E = 12V, L = 15mH, R = 100Ω. Le dipôle D est une diode idéale dont la caractéristique courant-tension est donnée également. Il s'agit d'un composant qui ne laisse passer le courant que dans un sens (celui de la flèche).





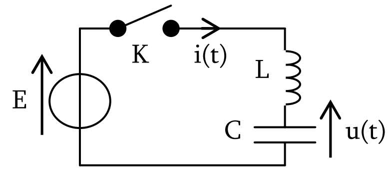
A la date t = 0, on ferme l'interrupteur K.

1. Montrer que la diode est bloquée (ou bloquante), c'est-à-dire qu'elle ne laisse pas passer le courant.
2. Exprimer le courant i(t) qui traverse la bobine.
3. Quelles sont les valeurs U_P et I_P des tensions et courants en régime permanent ? Dans quel état est la diode ?
4. Quelle est l'énergie W_L emmagasinée pendant le régime transitoire ?
5. On ouvre l'interrupteur à la date t = θ = 10τ. Peut-on considérer que le régime permanent est atteint à cette date ?
6. Montrer que la diode devient passante (c'est-à-dire qu'elle laisse passer un courant).
7. Exprimer l'intensité i(t) qui traverse l'enroulement à partir de θ.
8. Comment l'énergie stockée dans la bobine est-elle dissipée ?
9. Tracer la courbe donnant l'évolution de l'intensité de 0 à 3 ms
10. Que se passerait-il en l'absence de diode ? L'interrupteur pourrait-il encore être considéré comme idéal ? Pour quelle raison ?
11. Dans quels types de montages retrouve-t-on des diodes de roue libre ?

2nd Ordre non amorti

Exercice 8 : Circuit LC

On considère le circuit suivant, Il comprend un générateur idéal de tension E = 1V, un interrupteur K, une bobine idéale d'inductance L = 0,25H, et un condensateur de capacité C = 1μF initialement déchargé. A la date t = 0, on ferme l'interrupteur K.



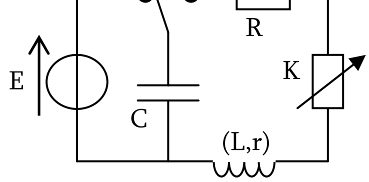
1. Quelles sont les valeurs de $u(0^+)$ et de $i(0^+)$.
2. Calculer la pulsation propre ω_0 et la période T_0 du circuit LC.
3. Etablir l'équation différentielle de la tension u aux bornes du condensateur.
4. Résoudre l'équation différentielle pour obtenir les expressions de u(t) et de i(t).
5. Représenter ces évolutions temporelles.
6. Quand atteint-on le régime permanent ? Est-ce réaliste ?

2nd Ordre amorti

Exercice 9 : Résistance critique

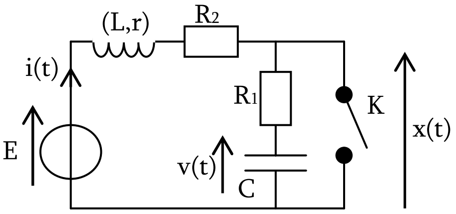
Le montage schématisé permet de charger un condensateur de capacité C par l'intermédiaire d'un générateur de tension continue de fém E (interrupteur en position 1) puis de le décharger à travers une bobine d'inductance L et de résistance r, montée en série avec une résistance variable K et une résistance R dont on cherche à déterminer la valeur (interrupteur en position 2). Un système de suivi informatique donne l'évolution de la tension aux bornes du condensateur. Selon la valeur de la résistance variable, la décharge s'effectue avec ou sans oscillations, les oscillations disparaissant lorsque K atteint la valeur K_0.
Données : L = 400mH, r = 20Ω, C = 2,2μF, K_0 = 189Ω.

1. La résistance critique du montage est $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.
   Vérifier que cette expression est bien homogène à une résistance.
2. Déterminer la valeur de la résistance R
3. Un fois le régime critique atteint, on introduit n noyau de fer doux dans la bobine et on recommence l'opération de charge-décharge. Qu'observe-t-on lors de la décharge du condensateur ? Justifier la réponse.



Exercice 10 : Conditions aux limites

Le circuit représentée, alimenté par un générateur de tension continue E, a été maintenu dans la configuration où l'interrupteur K est fermé pendant un temps suffisamment long pour que l'on puisse considérer le régime permanent comme établi. A la date t = 0, on ouvre l'interrupteur.



1. En justifiant chaque réponse, compléter le tableau suivant qui, pour différentes grandeurs, vise à décrire comment s'effectue la transition à l'instant initial, et la valeur en régime établi.

	i(t)	v(t)	x(t)
$t = 0^-$			
$t = 0^+$			
$t \to +\infty$			

2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par v(t) après fermeture de l'interrupteur. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i(t). Comparer les solutions particulières de ces équations et les valeurs en régime permanent prises par v et i.

Exercice 11 : Résolution en régime pseudo-périodique

On étudie le même circuit que dans l'exercice précédent, en considérant que le cas où $R_1 = R_2 = R$

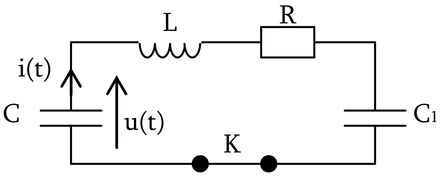
1. Dans le cas particulier où R = 0Ω, montrer que la tension v aux bornes du condensateur évolue de manière sinusoïdale, exprimer la pulsation ω_0 des oscillations en fonction des données ainsi que l'expression complète de v(t).
2. Déterminer en fonction de L et de C la résistance $R = R_C$ pour laquelle v(t) évolue suivant un régime critique.

On pose dans toute la suite $R = ½R_C$.

3. Simplifier l'équation différentielle vérifiée par v pout $t \geq 0$ en l'écrivant uniquement en fonction de v, de E, et de ω_0.
4. Montrer que la tension v s'écrit pour $t \geq 0$:
$$v\left(t\right)=U_1\exp\left(\alpha t\right)\cos\left(\beta t+\varphi\right)+U_2,$$
en précisant la valeur de tous les coefficients de cette expression : α, β, φ, et des tension U_1 et U_2.
5. Tracer l'allure de la courbe v(t) pour $t \geq 0$ pour $\omega_0 = 1$ rad.s^{-1} et pour E = 10V (tracer d'abord séparément l'enveloppe exponentielle du cosinus).
6. Aspect énergétique : Quelles sont les énergies stockées dans le circuit à t = 0 ? Et à t = +∞ ?

Exercice 12 : Décharge d'un C dans un circuit RLC

Dans le montage suivant, on ferme l'interrupteur à l'instant t = 0. Le condensateur, de capacité C est initialement chargé sous une tension u_0 (charge q_0), tandis que le condensateur de capacité C_1 est initialement déchargé.



a) Quelle est l'équation différentielle satisfaite par l'intensité i(t) circulant dans le circuit ?

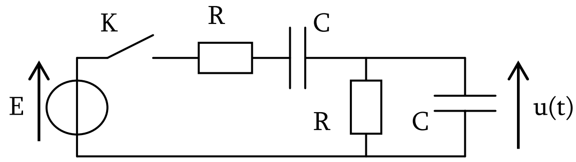
b) Déterminer l'expression de C_1 en fonction de R, L et C correspondant au régime critique de décharge, puis calculer C_1 (Application numérique).

Données numériques : L=0,1H, C=100nF, R=4 kΩ, u_0=10V.

c) Trouver l'expression du courant i(t) et représenter le graphe de |i(t)|.

Exercice 13 : Circuit RC série-parallèle

Dans le circuit ci-dessous, les condensateurs sont identiques et ont une capacité C = 10µF, les résistors sont identiques et ont une résistance R = 10kΩ. Les condensateurs sont initialement déchargés. E = 10V.

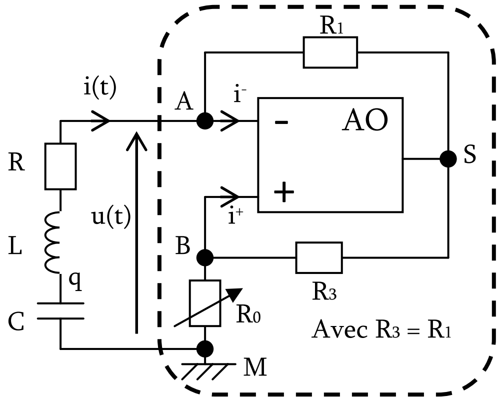


1. Calculer la constante de temps du circuit.
2. Déterminer toutes les valeurs des tensions et des intensités à la date $t = 0^+$., ainsi qu'en régime permanent (faire des schémas équivalents si nécessaires).
3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u.
4. Résoudre cette équation pour trouver l'expression de u.
5. Tracer la courbe u(t).

Autres Régimes

Exercice 14 : Entretien des oscillations d'un RLC

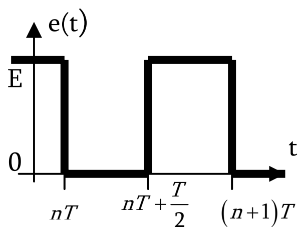
Un circuit RLC classique est branché sur un dipôle AM appelé « résistance négative » et entouré en pointillés sur le schéma. Ce dipôle est conçu à partir de trois résistors et d'un AO, schématisé par un rectangle. On suppose l'AO idéal, donc $i^+=i^-=0$, et on voit qu'il fonctionne en mode linéaire (rétroaction négative), donc les tensions de ces entrées sont égales $e^+ = e^-$.



1. Montrer que la tension $u=u_{AM}$ a pour expression $u_{AM}=-R_0.i$. Le dipôle AM est-il récepteur ou générateur ? Justifier.
2. Etablir l'équation différentielle en q du circuit RLC branché sur le dipôle AM. Quelle valeur doit-on donner à R_0 pour obtenir des oscillations sinusoïdales ? Préciser alors le rôle du dispositif à résistance négative.

Exercice 15 : Régime transitoire d'un circuit RC soumis à une tension créneau

On considère un circuit RC soumis à une tension créneau e(t) périodique telle que : e(t) = E pour $nT \le t \le nT+\dfrac{T}{2}$ et e(t) = 0 pour $nT+\dfrac{T}{2} \le t \le (n+1)T$.



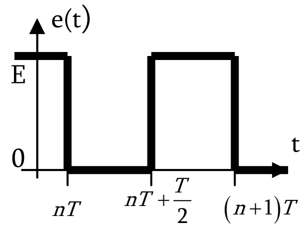
Données : E = 1V, R = 1kΩ, C = 1µF et T = 2ms

A la date t = 0, on ferme l'interrupteur K. Le condensateur est initialement déchargé. On étudie le régime transitoire.

1. Calculer la constante de temps τ du circuit RC
2. Exprimer la tension u(t) de la tension aux bornes du condensateur en fonction des seuls paramètres t et τ pour $0 < t \le T/2$.
3. Exprimer la tension U_{11} à la date t = T/2 en fonction de E et de $\alpha = e^{-T/2\tau}$. Calculer U_{11}.
4. On pose t' = t-T/2. Exprimer la tension u(t') en fonction des seuls paramètres t' et τ pour $0 < t' \le T/2$
5. Calculer U_{12} à la date t' = T/2.
6. On pose t'' = t-T. Exprimer la tension u(t'') en fonction des seuls paramètres t'' et τ pour $0 < t'' \le T/2$
7. Calculer la tension U_{21} à la date t'' = T/2.
8. On pose t''' = t-3T/2. Exprimer la tension u(t''') en fonction des seuls paramètres t''' et τ pour $0 < t''' \le T/2$
9. Calculer la tension U_{22} à la date t''' = T/2.
10. Tracer dans le même système d'axes les tensions u et e sur les deux premières périodes.

Exercice 16 : Circuit RC en régime périodique forcé

On considère le même circuit RC qu'à l'exercice précédent, soumis à la même tension e(t), mais on l'étudie cette fois en régime permanent forcé.



Le motif décrit par la tension u(t) se répète à l'identique sur deux périodes consécutives.

Données : E = 1V, R = 1kΩ, C = 1µF et T = 2ms

1. On choisit le début d'une période quelconque comme origine des dates. On note Um = $u(t=0^+)$. Exprimer la tension u(t) aux bornes de C en fonction du temps t, et des paramètres E, Um et de la constante de temps τ du circuit RC pour $0 < t \le T/2$.
2. Exprimer la tension U_M à la date t = T/2. En déduire une première relation entre U_M, Um, E et $\alpha = e^{-T/2\tau}$.
3. Exprimer la tension u(t) pour $T/2 \le t \le T$ en fonction de E, U_M et τ.
4. Exprimer une seconde relation entre Um et U_M. En déduire les expressions de Um et de U_M en fonction de E et de α.
5. Quelle est la moyenne de la tension u(t) ? Montrer que ces deux tensions sont symétriques par rapport à la tension E/2.
6. Calculer Um et U_M, et tracer l'évolution de la tension u(t) sur une période.

Supplément EXERCICES – EC3

Exercice 1 : Conventions

a) $Cu = q_1 = -q_2$, et $i(t) = \frac{dq_1}{dt} = -\frac{dq_2}{dt} = C\frac{du}{dt}$

b) $Cu = q_1 = -q_2$, et $i(t) = -\frac{dq_1}{dt} = +\frac{dq_2}{dt} = -C\frac{du}{dt}$

c) $Cu = -q_1 = q_2$, et $i(t) = -\frac{dq_1}{dt} = +\frac{dq_2}{dt} = +C\frac{du}{dt}$

d) $Cu = -q_1 = q_2$, et $i(t) = \frac{dq_1}{dt} = -\frac{dq_2}{dt} = -C\frac{du}{dt}$

e) $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ f) $u(t) = -L\frac{di(t)}{dt}$

Exercice 2 : Unicité d'une équation différentielle

Dans tous les cas on va retrouver la même équation : les signes changent dans les équations séparées, mais se compensent les uns les autres lorsqu l'on regroupe tout…

a) $Cu = -q$, $i = \frac{dq}{dt} = -C\frac{du}{dt}$, et $u = \frac{-q}{C} = +L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$

b) $Cu = q$, $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$, et $u = \frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2}$

c) $Cu = -q$, $i = \frac{-dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$, et $u = \frac{-q}{C} = -L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$

d) $Cu = q$, $i = \frac{-dq}{dt} = -C\frac{du}{dt}$, et $u = \frac{q}{C} = L\frac{di}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2}$

Exercice 3 : Circuit RC – Cas Général

→ Pour t > t0 : $RC\frac{du}{dt} + u = E \quad \Rightarrow \tau\frac{du}{dt} + u = E \quad ,\tau = RC\cdot$

→ Résolution : $\begin{cases} u_C(t) = \lambda e^{-t/\tau} + E_2, & \lambda \in \mathbb{R} \\ CI : \quad u_C(t_0) = \lambda e^{-t_0/\tau} + E_2 = E_1 \end{cases}$

(continuité de la tension aux bornes du condensateur)

Donc : $u_C(t) = (E_1 - E_2)e^{-(t-t_0)/\tau} + E_2 = \boxed{E_1 + \delta E\left(1 - e^{-(t-t_0)/\tau}\right)}$

→ Evolution pour t > t0 de $\boxed{i(t) = C\frac{du(t)}{dt} = \frac{\delta E}{R}\cdot e^{-(t-t_0)/\tau}}$

Exercice 4 : Fonctionnement d'une minuterie

1. Equa diff : $RC\frac{du}{dt} + u = E \quad \Rightarrow \tau\frac{du}{dt} + u = E \quad ,\tau = RC$
2. Régime permanent : $u \to E$
3. Résolution … $u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$
4. Tracé habituel… E = valeur finale (asymptote horizontale), et au bout de t = τ, la tangente à l'origine croise l'asymptote, et la tension uC atteint 63% de la valeur finale E.
5. Pour R = 100kΩ et C = 200μF, on a τ = 20s.
6. Expression littérale de $t_0 = \tau \ln\left(\frac{E}{E - U_{\lim}}\right)$
7. Calcul, t0 = 22s → On est proche de τ = 63% de la valeur finale
8. Ulim = 20V → t0 voisin de τ → Plus précis car la pente de la courbe est plus franche. Si on se plaçait beaucoup plus loin, les variations seraient très faible et la lampe pourrait s'allumer ou s'éteindre pour n'importe quelle perturbation…
9. Pour modifier la durée d'allumage, il faut modifier τ, le plus simple étant de placer une résistance variable (potentiomètre), qui ne coûte pas cher du tout.

Exercice 5 : Résistance de fuite d'un condensateur

On définit les courants dans les différentes branches : i dans C, i1 dans R1 et i2 dans R2, tous orientés vers le bas… On a donc : (loi des nœuds et lois des mailles)

$$\begin{cases} i_1 = i + i_2 \\ u + R_1 i_1 = E \\ R_2 i_2 = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = u + R_1(i + i_2) \\ E = u + R_1 C\frac{du}{dt} + R_1\frac{u}{R_2} \end{cases}$$

Sous forme canonique : $\frac{R_2 E}{R_2 + R_1} = u + \left(\frac{R_1 R_2 C}{R_2 + R_1}\right)\frac{du}{dt}$

On pose $\boxed{\tau = \left(\frac{R_1 R_2 C}{R_2 + R_1}\right) = (R_1 // R_2)C}$

Résolution : $\boxed{u(t) = \frac{R_2 E}{R_2 + R_1}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

Et $\boxed{i(t) = C\frac{du(t)}{dt} = \frac{CR_2 E}{R_2 + R_1}\cdot\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{E}{R_1}e^{-t/\tau}}$

Rmq : On reconnaît un diviseur de tension pour la tension finale, lorsque plus aucun courant ne circule…

Exercice 6 : Association L // R

Même démarche qu'à l'exercice précédent (C avec R de fuite), on définit les courants, on écrit les lois de Kirchhoff (on suppose qu'on est dans l'ARQS), et on trouve l'équa diff :

$$\frac{L(R_2 + R_1)}{R_1 R_2}\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R_1} \Rightarrow \tau = \frac{L(R_2 + R_1)}{R_1 R_2} = \frac{L}{R_1 // R_2}$$

Et $\boxed{i(t) = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

Exercice 7 : Diode à diode dite de « Roue Libre »

1. Pt de fctt : uD = -E <0, donc i = 0 → diode bloquante
2. Courant → Circuit RL… $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \tau = \frac{L}{R} = 0.15ms$
3. Diode bloquante ⇔ interrupteur ouvert en permanent
   → UP=0, IP=E/R=120mA
4. Energie emmagasinée → Stockée $W_L = \frac{1}{2}LI_P^2 = 0.11mJ$
5. Régime permanent atteint au bout de 5τ…
6. K ouvert → Plus de géné → Le courant dans la bobine est continu et reste dans le sens de la flèche, qui correspond au sens passant de la diode → Tension nulle aux bornes de D.
7. Régime libre : Résolution … $i(t) = I_P e^{-(t-\theta)/\tau}$
8. Energie stockée dans L → Dissipé par effet Joule dans R
9. Courbe classique (voir TD RL)
10. Sans diode, le courant devrait s'annuler instantanément, ce qui est impossible → Etincelle, (arc électrique), l'interrupteur ne peut plus être considéré comme idéal car il laisserait passer cet arc… Attention, très dangereux pour les composants électriques

Exercice 8 : Circuit LC

1. $u(0^+) = i(0^+) = 0$ car la tension est continue dans C, et l'intensité est continue dans L.
2. Pulsation $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 2.10^3\, rad.s^{-1}$,

   Période $T_0 = \dfrac{1}{f_0} = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} = 3{,}1.10^{-3}\, s$ ·
3. Equa diff : $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{u}{LC} = \dfrac{E}{LC} \quad \Rightarrow \dfrac{d^2u}{dt^2} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 E$
4. Résolution … $\begin{cases} u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + E \\ CI1: \quad u(0) = 0 = A + E \\ CI2: \quad \dot{u}(0) = i(0)/C = 0 = B\omega_0 \end{cases}$

   Donc $\begin{cases} u(t) = E\left(1-\cos(\omega_0 t)\right) \\ i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt} = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{cases}$
5. Evolution de la tension : un cosinus non amorti, qui part de 0, et qui oscille entre 0 et E (sa valeur max) à l'infini !!!
6. Il n'y a pas d'amortissement → Pas de régime permanent. Ce n'est bien entendu pas réaliste.

Exercice 9 : Résistance Critique

1. Dimension : On a $\begin{cases} u = L\dfrac{di}{dt} & \Rightarrow [L] = \dfrac{[u]\cdot T}{I} \\ i = C\dfrac{du}{dt} & \Rightarrow [C] = \dfrac{I\cdot T}{[u]} \end{cases}$

   Ainsi : $[R_C] = [\cancel{2}]\sqrt{\dfrac{[L]}{[C]}} = \sqrt{\dfrac{[u]\cdot T}{I}\cdot\dfrac{[u]}{I\cdot T}} = \dfrac{[u]}{I} = [\Omega]$

2. Résistance critique : $R_C = R + K_0 + r = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

   Donc $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} - K_0 - r = 664\Omega$

3. Noyau de fer dans la bobine → L augmente et donc Rc aussi. La résistance du montage est alors inférieure à la résistance critique, il y a moins d'amortissement, et les oscillations réapparaissent. On retrouve l régime pseudo-périodique.

Exercice 10 : Conditions aux limites

1. Justifications : → On fait les schémas équivalents juste avant ouverture et juste après ouverture de l'interrupteur

   Aussi: → i continue dans L, v continu dans C.

	i(t)	v(t)	x(t)
$t = 0^-$	$\dfrac{E}{R_2 + r}$	0	0
$t = 0^+$	$\dfrac{E}{R_2 + r}$	0	$R_1 i(0^+) = \dfrac{R_1 E}{R_2 + r}$
$t \to +\infty$	0	E	E

2. Equa diff vérifiée par v(t) après fermeture de l'interrupteur :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{(R_2 + R_1 + r)}{L}\cdot\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{E}{LC}$$

Pour i(t). $i(t) = C\cdot\dfrac{dv(t)}{dt}$, on obtient :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{(R_2 + R_1 + r)}{L}\cdot\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

Solutions en régime permanent = Solution part de l'équa diff.

Exercice 11 : Résolution en régime pseudo-périodique

1. Equation : $E = LC\dfrac{d^2v(t)}{dt^2} + 2RC\dfrac{dv(t)}{dt} + v(t)$

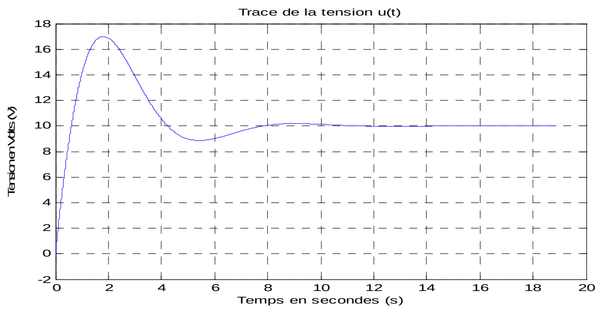
   R = 0Ω → Circuit LC, $E = LC\dfrac{d^2v(t)}{dt^2} + v(t)$

   Forme canonique $\dfrac{d^2v(t)}{dt^2} + \omega_0^2 v(t) = {\omega_0}^2 E$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

   → Résolution … $u(t) = E\left(1-\cos(\omega_0 t)\right) + \dfrac{E}{\omega_0 R_2 C}\sin(\omega_0 t)$
2. Régime critique : σ=1, → $R_C = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$
3. Simplification : R= Rc/2 → $\sigma = \dfrac{R_C}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 0.5$ et :

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \omega_0\frac{dv(t)}{dt} + {\omega_0}^2 v(t) = {\omega_0}^2 E$$

4. Résolution … $v(t) = e^{-\omega_0 t/2}\left(-2E\cos\left(\omega_0 t\sqrt{3/4} + \dfrac{\pi}{3}\right)\right) + E$
5. Allure de la courbe :



6. A t = 0, → Dans le bobine : $W_L = \dfrac{1}{2}LI^2 = \dfrac{LE^2}{2{R_2}^2}$

   → Dans le condensateur : $W_C = 0$ (pas de tension)

   A t = +∞ → Dans le bobine : $W_L = 0$ (plus de courant)

   → Dans le condensateur : $W_C = \dfrac{1}{2}CU^2 = \dfrac{1}{2}CE^2$

Exercice 12 : Décharge d'un C dans un circuit RLC

a) Equa diff : $\dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\cdot\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C_1}\right)i = 0$

2nd ordre avec $\begin{cases} \sigma = \dfrac{R}{2L\omega_0} = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C_{eq}}{L}} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C_1}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{LC_{eq}}} \end{cases}$ avec $\dfrac{1}{C_{eq}} = \left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C_1}\right)$

b) Régime critique : $\sigma = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C_{eq}}{L}} = 1$, donc $\dfrac{1}{C_{eq}} = \dfrac{R^2}{4L} = \left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C_1}\right)$

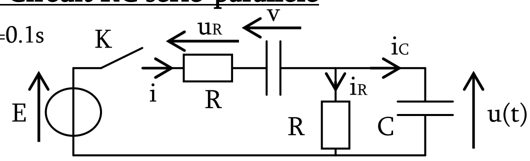
Ce qui donne $C_1 = \dfrac{4LC}{R^2C - 4L} = 33\,nF$

c) Résolution …. $i(t) = \dfrac{-u_0}{L}t\cdot e^{-\omega_0 t}$ (Tracé habituel critique…)

SOLUTIONS des EXERCICES – EC3 – Régime Transitoire – 2/2

Exercice 13 : Circuit RC série-parallèle

1. τ=RC=0.1s



2. Initialement, u = v = 0 (car tension continue aux bornes de C, et les C sont initialement déchargés), et u_R = E. Ainsi, i = E/R, et puisque i_R = u/R = 0, i_C = i.
   En régime permanent, Toutes les tensions et courants sont nuls, sauf v = E (faire un schéma…).

3. Mailles et noeuds : $\begin{cases} u+v+u_R = E = u+v+Ri \\ i = i_C + i_R = C\dfrac{dv}{dt} = C\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{R} \end{cases}$

   Donc en injectant : $\begin{cases} E = 2u + v + RC\dfrac{du}{dt} \\ RC\dfrac{dv}{dt} = RC\dfrac{du}{dt} + u \end{cases}$

   On dérive : $\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -2\dfrac{du}{dt} - \tau\dfrac{d^2u}{dt^2} \\ \tau\dfrac{dv}{dt} = -2\tau\dfrac{du}{dt} - \tau^2\dfrac{d^2u}{dt^2} = \tau\dfrac{du}{dt} + u \end{cases}$

   Donc : $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{3}{\tau}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{\tau^2} = 0$

4. Eq du 2nd ordre : $\begin{cases} \omega_0 = 1/\tau \\ \sigma = 3/2 \end{cases}$ → Régime apériodique

   $$\Rightarrow u(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}, \qquad A_1, A_2 \in \mathbb{R}$$

   Eq caractéristique : $\begin{cases} X^2 + \dfrac{3}{\tau}X + \dfrac{1}{\tau^2} = 0 \Rightarrow r_{1/2} = \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2\tau} \\ \Delta = \dfrac{9}{\tau^2} - \dfrac{4}{\tau^2} = \dfrac{5}{\tau^2} \end{cases}$

   CI : $\begin{cases} u(0) = A_1 + A_2 \\ \dot{u}(0) = \dfrac{i_C(0)}{C} = \dfrac{E}{\tau} = A_1 r_1 + A_2 r_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = -A_2 = \dfrac{E}{\sqrt{5}}$

   Donc : $u(t) = \dfrac{E}{\sqrt{5}}\left[e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}t} - e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}t}\right]$

5. Tracé de courbe apériodique (voir courbes du cours…), sans oscillations, u croit rapidement, puis chute lentement (exponentiellement)

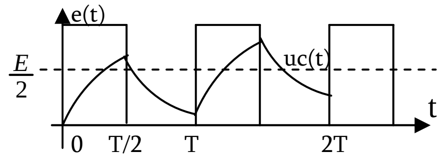
Exercice 14 : Entretien des oscillations d'un RLC

1. Arguments : → $i^- = 0$, donc $i_{R1} = i$
   → $e^+ = e^-$, donc $u_{AS} = u_{BS}$ et $i_{R3} = i_{R1} = i$
   → $i^+ = 0$, donc $i_{R0} = i$ (vers le haut)
   Ainsi, $u_{BM} = -R_0.i = u_{AM}$ → $u.i = -R_0.i^2 < 0$ en convention récepteur, donc le dipôle est générateur.

2. Avec la loi des mailles : $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{dq}{dt}\dfrac{(R-R_0)}{L} + \dfrac{q}{LC} = 0$
   Les oscillations sont sinusoïdales si pas d'amortissement, donc si le terme en dérivée première dq/dt s'annule. Il faut R = R_0. Dans ce cas, le dispositif à résistance négative a pour rôle de compenser les pertes par effet Joule dans R

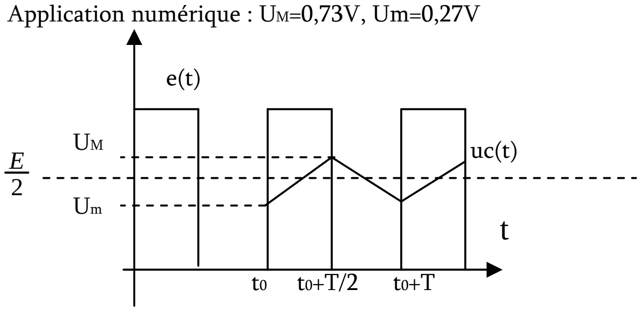
Exercice 15 : Transitoire RC soumis à un créneau

1. Constante de temps τ = RC = 1ms.
2. Circuit RC soumis à E, CI u(0)=0… $u(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$
3. A t = T/2 : $U_{11} = u(T/2) = E(1-\alpha) = 0.63V$
4. Régime libre avec CI différente : $u(t) = U_{11}e^{-t'/\tau}$
5. A t' = T/2 : $U_{12} = u(t' = T/2) = \alpha U_{11} = \alpha(1-\alpha)E = 0.23V$
6. Idem 2) avec CI différente : $u(t'') = E + (U_{12} - E)e^{-t/\tau}$
7. A t'' = T/2 : $U_{21} = u(t'' = T/2) = E + \alpha(U_{12} - E) = 0.72V$
8. Idem 4) avec CI différente $u(t) = U_{21}e^{-t'''/\tau}$
9. A t''' = T/2 : $U_{22} = u(t''' = T/2) = \alpha U_{21} = 0.26V$
10. Tracé :



Exercice 16 : Circuit RC en régime périodique forcé

1. Pour $0 \le t \le T/2$, on a $\tau \cdot \dot{u}_C(t) + u_C(t) = E$
   Argument essentiel : Continuité de la tension dans le C
   $$\Rightarrow u_C(t) = E - (E - U_m)e^{-t/\tau}$$
2. En t = T/2 : $U_M = E - (E - U_m)e^{-T/2\tau}$
   donc $U_M = E(1-\alpha) + \alpha U_m$ avec $\alpha = e^{-T/2\tau}$
3. Pour $T/2 \le t \le T$, on a $\tau \cdot \dot{u}_C(t) + u_C(t) = 0$
   Argument essentiel : Continuité de la tension dans le C
   $$\Rightarrow u_C(t) = U_M \cdot e^{-\left(t-\frac{T}{2}\right)/\tau}$$
4. En t = T : $U_m = U_M \cdot e^{-T/2\tau} = \alpha U_M$
   On a $\begin{cases} U_M(1-\alpha^2) = E(1-\alpha) \\ U_m = \alpha U_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_M = \dfrac{E}{(1+\alpha)} \\ U_m = \dfrac{\alpha E}{(1+\alpha)} \end{cases}$
5. Moyenne : $\langle u(t) \rangle = \dfrac{U_M + U_m}{2} = \dfrac{E + \alpha E}{2(1+\alpha)} = \dfrac{E}{2}$
   Et aussi $\begin{cases} \dfrac{E}{2} - U_M = \dfrac{E}{2} - \dfrac{E}{(1+\alpha)} = \dfrac{-E(1-\alpha)}{2(1+\alpha)} \\ \dfrac{E}{2} - U_m = \dfrac{E}{2} - \dfrac{\alpha E}{(1+\alpha)} = \dfrac{E(1-\alpha)}{2(1+\alpha)} = -\left(\dfrac{E}{2} - U_M\right) \end{cases}$
   → On est bien symétrique par rapport à E/2
6. Application numérique : U_M=0,73V, Um=0,27V



Puisque $\tau < T$, le condensateur n'a pas le temps de se charger et de se décharger complètement
→ Il se place au milieu (ex du hacheur en Terminale…)

SOLUTIONS du TD – EC3 – Régime Transitoire – 1/1

Exercice 1 : Régime Permanents

→ $\begin{cases} I_{1P} = E/R \\ I_{2P} = 0 \\ U_P = E \end{cases}$, → $\begin{cases} I_{1P} = \dfrac{E}{R} + \dfrac{E}{R'+r} \\ I_{2P} = \dfrac{E}{R'+r} \\ U_P = \dfrac{r}{R'+r}E \end{cases}$ → $\begin{cases} I_{1P} = \dfrac{E}{R+R'+r} \\ U_{1P} = \dfrac{r}{R+R'+r}E \\ U_{2P} = \dfrac{R}{R+R'+r}E \end{cases}$

Exercice 2.1 : Régime libre Circuit RC

1. Armature inférieure : $q_{inf} = -q_{sup} = -Q_0 = -10\mu C$
2. Tension aux bornes du condensateur $U_0=Q_0/C = 10V$
3. Energie stockée : $W_C = \dfrac{1}{2}CU^2 = 50\mu J$
4. Tension continue aux bornes d'un C → $u(t=0^+)=U_0=10V$. On applique la loi d'Ohm : $i(t=0^+) = \dfrac{u(t=0^+)}{R} = \dfrac{U_0}{R} = 1mA$.
5. Régime permanent : $U_P=0$ et $I_P=0$
6. Eq diff : $RC\dfrac{du}{dt} + u = 0 \quad \Rightarrow \tau\dfrac{du}{dt} + u = 0$
7. Constante de temps τ : $\tau = RC = 10ms$
8. Résolution : $u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ et $i(t) = \dfrac{u}{R} = \dfrac{U_0}{R}\cdot e^{-t/\tau}$
9. Courbes habituelles… (voir TP circuit RC)
10. $u(\theta)$ = 1% de U_0 pour $\theta = 5\tau$ → utilité de τ : avoir un résultat transposable à n'importe quel problème, quelles que soient les valeurs de R et de C… on calcule τ

Exercice 2.2 : Courant dans un circuit RL (voir DM)

1. Schémas équivalents : voir corrigé DM

2. Pour $t \in [0, t_0]$, $\dfrac{E}{r} = \tau_1 \dfrac{di_2(t)}{dt} + i_2(t)$, avec $\tau_1 = \dfrac{L}{r}$.

→ $i_2(t) = \dfrac{E}{r}\left(1 - e^{\left(-t/\tau_1\right)}\right)$

3. Pour $t \geq t_0$: $0 = \tau_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} + i_2(t)$ avec $\tau_2 = \dfrac{L}{r+R}$

→ $i_2(t) = \dfrac{E}{r} e^{\left(-(t-t_0)/\tau_2\right)}$

4. Tension : $u_L(t) = L\dfrac{di_2(t)}{dt} + ri_2(t)$

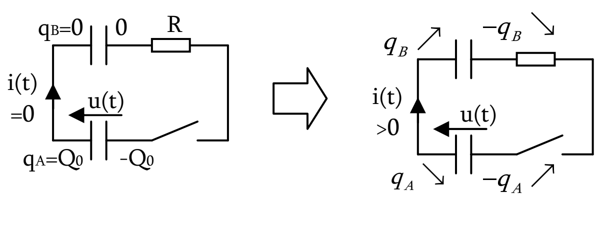
→ $u_L(t) = \left(E - \dfrac{LE}{r\tau_2}\right)e^{\left(-(t-t_0)/\tau_2\right)} = \dfrac{-ER}{r}e^{\left(-(t-t_0)/\tau_2\right)}$

→ Si R>r, on pourra avoir une tension supérieure à E, et même de beaucoup si R>>r, ce qui est fréquent. Ca peut être gênant car peut apparaître alors une tension à laquelle on ne s'attend pas, qui pourrait éventuellement griller les circuits.

Exercice 2.3 : Décharge d'un C dans un autre

1. Evolution des charges :

Pour t<0 Quand K se ferme, les charges vont se répartir



2. Continuité des tensions dans les C: $u(t=0^+)=U_0$, et $u'(t=0^+)=0$

Pour i, loi d'Ohm : $i(t=0^+) = \dfrac{u-u'}{R}(t=0^+) = \dfrac{U_0}{R}$

3. Eq diff : $u - u' - Ri = 0 \qquad \Leftrightarrow u + RC\dfrac{du}{dt} - u' = 0$

Attention au sens de i : $i = -C\dfrac{du}{dt} = +C\dfrac{du'}{dt}$

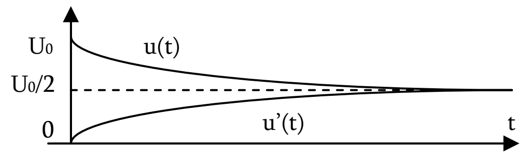
Et on voit que les armatures sont isolées deux à deux, donc on peut éliminer u' : $q_A + q_B = cstte = Q_0 \quad \Rightarrow u + u' = \dfrac{Q_0}{C} = U_0$

Ainsi : $u + RC\dfrac{du}{dt} - u' = 0 \qquad \Leftrightarrow u + \dfrac{RC}{2}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{U_0}{2}$

Attention : constante de temps τ/2

4. Résolution : $u(t) = \dfrac{U_0}{2}\left(1 + e^{-2t/\tau}\right)$ et $u'(t) = \dfrac{U_0}{2}\left(1 - e^{-2t/\tau}\right)$

Tracé :



5. Bilan énergétique : $W_{initial} = W_{final} + W_{pertes}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}CU_0^2 = 2\times\frac{1}{2}C\left(\frac{U_0}{2}\right)^2 + W_R = \frac{1}{4}CU_0^2 + W_R$$

Donc on a perdu dans la R : $W_R = \dfrac{1}{4}CU_0^2$

Exercice 3 : Circuit LC

1. Equation : $u = L\dfrac{di}{dt} = LC\dfrac{d^2u}{dt^2} \qquad \Rightarrow \dfrac{d^2u}{dt^2} - \dfrac{1}{LC}u = 0$
2. $\Rightarrow \dfrac{d^2u}{dt^2} - \omega_0^2 u = 0$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et σ=0 → Pas d'amortissement
3. u continue dans C → $u(0^+) = U_0 = 20V$
   et i continue dans L → $i(0^+) = 0$
4. Résolution : $\begin{cases} u^{PART}(t) = 0 \\ u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \quad A, B \in \mathbb{R} \end{cases}$

   CI : $\begin{cases} u(0) = U_0 = A \\ \dfrac{du}{dt}(0) = \dfrac{i(0)}{C} = 0 = B\omega_0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u(t) = U_0\cos(\omega_0 t) \\ i(t) = -CU_0\omega_0\sin(\omega_0 t) \end{cases}$
5. Evolution : 2 sinusoïdes déphasées de Pi/2 (non amorties)
6. Energie totale : $W(t) = W_C + W_L = \dfrac{1}{2}Cu^2(t) + \dfrac{1}{2}Li^2(t)$

   $W(t) = \dfrac{CU_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t) + \dfrac{LC^2U_0^2}{2\sqrt{LC}^2}\sin^2(\omega_0 t) = \dfrac{CU_0^2}{2}$

   → Énergie constante : pas de perte d'énergie (pas de R)

Exercice 4.1 : Circuit RLC parallèle

1. Continuité de la tension dans le C : $u(0^+) = u(0^-) = Q_0/C = U_0 = 20V$
   Continuité du courant dans L : $i_L(0^+) = i(0^-) = 0$
   Loi d'Ohm dans R : $i_R(0^+) = U_0/R = 20mA = i(0^+)$
2. Régime permanent : Tout est égal à 0 (pas de sources…)
3. Loi des Nœuds :

$$i = i_L + i_R = -C\frac{du}{dt} \quad \Leftrightarrow C\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{u}{L}+\frac{1}{R}\frac{du}{dt}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{du}{dt}+\frac{1}{LC}u=0$$

D'où : $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=3162\,rad.s^{-1}$ et $\sigma=\frac{1}{2\omega_0 RC}=\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}=0.16$

→ Nature du régime: pseudo-périodique

4. Résolution : la même que dans le TP et dans les exos techniques… tracé également, d'où une fois de plus l'utilité de définir des grandeurs générales ω_0 et σ
5. Par contre si on augmente R, l'effet est inverse par rapport au RLC série, puisque cela aura pour effet ici de diminuer l'amortissement, moins de courant va passer dans la branche de R et les oscillations vont donc durer plus longtemps.
6. Fin du régime transitoire : il faut étudier pour cela l'enveloppe exponentielle de la solution : $e^{\mathrm{Re}(r)t}=e^{-\sigma\omega_0 t}=e^{-t/\tau}$ avec $\tau=\frac{1}{\sigma\omega_0}\approx 2ms$ la constante de temps de cette enveloppe. On pourra donc considérer que le régime transitoire est terminé au bout de 3τ = 6ms.

Exercice 4.2 : Circuit RLC série

1. L'équation devient $\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du}{dt}+\frac{1}{LC}u=0$ (voir TP),
2. Donc $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ est le même, par contre $\sigma=\frac{R}{2\omega_0 L}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ est bien différent. Ainsi, le fait d'augmenter R ici augmente le coefficient d'amortissement et diminue le nombre d'oscillation, car tout le courant est obligé de passer R…

Exercice 5 : Régime permanent périodique

1. Pour $0 \le t \le \frac{T}{2}$, on a $\tau\cdot\dot{u}_C(t)+u_C(t)=E$

   Argument essentiel : Continuité de la tension dans le C

   $$\Rightarrow u_C(t)=E-(E-U_m)e^{-t/\tau}$$

2. En t = T/2 : $U_M=E-(E-U_m)e^{-T/2\tau}$

   donc $U_M=E(1-\alpha)+\alpha U_m$ avec $\alpha=e^{-T/2\tau}$

3. Pour $\frac{T}{2}\le t\le T$, on a $\tau\cdot\dot{u}_C(t)+u_C(t)=0$

   Argument essentiel : Continuité de la tension dans le C

   $$\Rightarrow u_C(t)=U_M\cdot e^{-\left(t-\frac{T}{2}\right)/\tau}$$

4. En t = T : $U_m=U_M\cdot e^{-T/2\tau}=\alpha U_M$

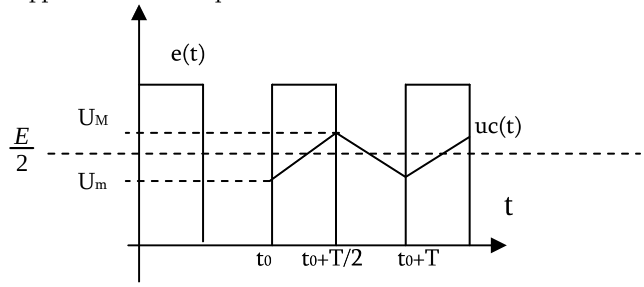
   On a $\begin{cases}U_M(1-\alpha^2)=E(1-\alpha)\\ U_m=\alpha U_M\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}U_M=\dfrac{E}{(1+\alpha)}\\ U_m=\dfrac{\alpha E}{(1+\alpha)}\end{cases}$

5. Moyenne : $\langle u(t)\rangle=\frac{U_M+U_m}{2}=\frac{E+\alpha E}{2(1+\alpha)}=\frac{E}{2}$

   Et aussi $\begin{cases}\dfrac{E}{2}-U_M=\dfrac{E}{2}-\dfrac{E}{(1+\alpha)}=\dfrac{-E(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}\\ \dfrac{E}{2}-U_m=\dfrac{E}{2}-\dfrac{\alpha E}{(1+\alpha)}=\dfrac{E(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}=-\left(\dfrac{E}{2}-U_M\right)\end{cases}$

   → On est bien symétrique par rapport à E/2

6. Application numérique : U_M=0,73V, U_m=0,27V



Puisque $\tau < T$, le condensateur n'a pas le temps de se charger et de se décharger complètement

→ Il se place au milieu (ex du hacheur en Terminale…)