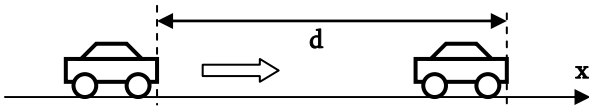


**Mouvement 1D**

**Exercice 1 : Distance de sécurité ?**

On étudie le mouvement de deux voitures, considérées comme ponctuelles, sur un axe (Ox), qui se suivent à une distance d, les deux à la vitesse constante v<sub>0</sub>. A t = 0s, la première voiture freine avec une décélération a. La seconde ne commence à freiner qu'au bout d'un temps t<sub>r</sub> = 0.6s avec une décélération b.

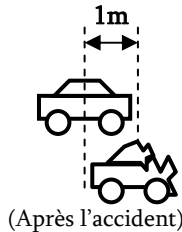
1. Quelle condition doit satisfaire d pour que la 2<sup>nd</sup>e voiture s'arrête derrière la 1<sup>ère</sup> ?
2. AN avec v<sub>0</sub> = 108km/h, a = 7.5m.s<sup>-2</sup> et b = 6 m.s<sup>-2</sup>.
3. Comparer la valeur de cette distance d avec la distance d'arrêt de chacune des voitures prises séparément.
4. Et dans le cas où les deux voitures ont même décélération ?



**Exercice 2 : De l'utilité de la ceinture de sécurité ?**

Un véhicule de masse m, en translation rectiligne uniforme de vitesse v<sub>0</sub> subit un choc violent. Entre le début et la fin de celui-ci, le centre d'inertie du véhicule s'est déplacé d'une distance d = 1m.

1. Dans l'hypothèse d'une vitesse décroissant linéairement, calculer la valeur de l'accélération subie lors du choc.
2. AN : v<sub>0</sub>=14m.s<sup>-1</sup> et d = 1m. Qu'en pensez-vous ?



**Exercice 3 : Mouvements rectiligne exponentiel**

Un point mobile M se déplace le long de l'axe Ox. Son abscisse x est fonction du temps :  $x(t) = a \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right]$ .

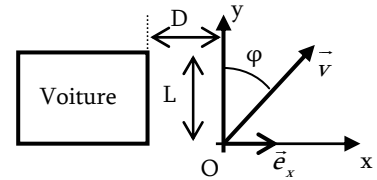
1. Quelles sont les dimensions des paramètres a et τ ?
2. Quelle est la valeur finale de x, au bout d'un temps très long ?
3. Calculer la vitesse moyenne entre les dates t<sub>1</sub>=0,400τ et t<sub>2</sub>=0,600τ. On l'exprimera en fonction du rapport a/τ et d'un coefficient numérique que l'on calculera.
4. Un capteur mesure les dates de passages t<sub>i</sub> en différents points d'abscisses x<sub>i</sub>. Les résultats sont reportés sur le tableau suivant :

|                     |   |      |      |      |      |     |
|---------------------|---|------|------|------|------|-----|
| t <sub>i</sub> (s)  | 0 | 0,45 | 1,02 | 1,83 | 3,22 | 300 |
| x <sub>i</sub> (cm) | 0 | 20   | 40   | 60   | 80   | 100 |

- 4.a) D'après la loi exponentielle de x en fonction du temps, comment exprime-t-on t en fonction de x ?
- 4.b) Vérifier que les valeurs mesurées vérifient bien une telle loi. Par identification, calculer les valeurs de a et de τ

**Exercice 4 : Mouvements rectilignes simultanés**

Soit une voiture de largeur L en mouvement le long d'un trottoir rectiligne xx'. Un piéton décide de traverser la route au moment où la voiture se trouve à une distance D. Le mouvement du piéton est rectiligne, uniforme, de vitesse  $\vec{v}$ , inclinée d'un angle φ par rapport à l'axe Oy.



1. La voiture se déplace à  $\vec{V} = V \cdot \vec{e}_x$  constante. Dans le cas où φ = 0 (il marche perpendiculairement au trottoir), quelle doit être la vitesse v<sub>0</sub> du piéton pour que la collision soit évitée ?
2. Dans le cas d'un angle φ quelconque, exprimer la vitesse v<sub>1</sub> du piéton, les équations horaires de son mouvement, et en déduire la condition sur L, D, v<sub>1</sub>, V et l'angle φ pour que la collision soit évitée.
3. En déduire la vitesse minimale v<sub>min</sub> à laquelle peut marcher le piéton, avec l'angle φ<sub>min</sub> correspondant. Exprimer v<sub>min</sub> en fonction de L, D et V.

**Mouvement 2D – Coordonnées Cartésiennes**

**Exercice 5 : Equations Horaires (2D et 3D)**

Un point M décrit l'espace avec les coordonnées cartésiennes suivantes :

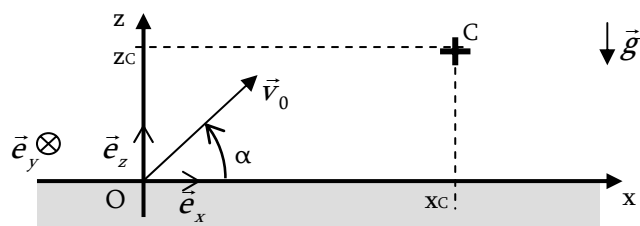
- |   |  |   |
|---|--|---|
| a) $\begin{cases} x(t) = 5t \\ y(t) = 2 \\ z(t) = 15t \end{cases}$                          | b) $\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -4t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$                          | c) $\begin{cases} x(t) = 2t^2 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -10t^2 \end{cases}$                                     |
| d) $\begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 4t^2 - 8t \end{cases}$                     | e) $\begin{cases} x(t) = 4 \\ y(t) = -4t^2 \\ z(t) = t/2 \end{cases}$                        | f) $\begin{cases} x(t) = 4 \sin \omega t \\ y(t) = 3 \\ z(t) = 0 \end{cases}$                               |
| g) $\begin{cases} x(t) = 4 \sin \omega t \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases}$               | h) $\begin{cases} x(t) = 4 \sin \omega t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$              | i) $\begin{cases} x(t) = \sin^2 \omega t \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases}$                               |
| j) $\begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \\ z(t) = 3 \end{cases}$ | k) $\begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \\ z(t) = 2t \end{cases}$ | l) $\begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \\ z(t) = h \sin 10\omega t \end{cases}$ |

- Tracer la trajectoire du point M et trouver son équation  
 → Déterminez les expressions du vecteur vitesse  $\vec{v}$  et du vecteur accélération  $\vec{a}$ .

## Exercice 6 : Tir balistique dans un champ de pesanteur

A l'instant  $t = 0$ , une particule ponctuelle  $M$  est lancée du point  $O$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  située dans le plan  $(Oxz)$  et faisant avec l'horizontale un angle  $\alpha > 0$  susceptible d'être ajusté.

Le mouvement de ce point, étudié dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ , est tel que son accélération est constante :  $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a} = -g \cdot \vec{e}_z$  avec  $g = \|\vec{g}\| > 0$

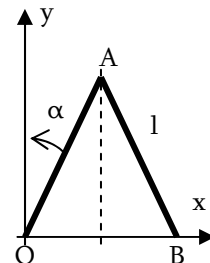


1. Exprimer les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  à l'instant  $t$  puis les équations horaires du mouvement.
2. En déduire l'équation de la trajectoire de  $M$  et préciser la nature de celle-ci.
3. A quel instant  $t_s$  le sommet  $S$  de cette trajectoire est-il atteint ? Quelle sont ses coordonnées  $x_s$  et  $z_s$  ?
4. Quelle est la portée  $OP$  du projectile, c'est-à-dire le point  $P$  où la trajectoire coupe l'axe  $(Ox)$ . A quel instant  $t_P$  ce point est-il atteint ? Quelle est la norme du vecteur vitesse en  $P$  ?
5. A  $v_0$  fixé, quelle est la portée maximale ? De quoi dépend-elle ?
6. Calculer pour chaque angle  $\alpha \in \{15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ\}$ , avec un même  $v_0$ , le sommet et la portée de la trajectoire (faire un tableau). Représenter toutes ces trajectoires.
7. Montrer qu'il existe deux valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles ces trajectoires issues de l'origine  $O$  atteignent une même cible  $C$  dans le plan  $(Oxy)$ .
8. Rechercher dans l'ensemble des points du plan  $(Oxy)$  accessibles au projectile lancé de  $O$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  de norme constante mais de direction quelconque. Vous déterminerez pour cela l'équation de la « parabole de sûreté » séparant les points du plan pouvant être atteint par le projectile de ceux qui ne le seront jamais.

## Mouvement 2D – Coordonnées Polaires

### Exercice 7 : Echelle Double

Une échelle double est posée sur le sol. Un de ses points d'appui reste constamment en contact avec le coin  $O$  d'un mur. La position de l'échelle à l'instant  $t$  est repérée par l'angle  $\alpha(t)$  formé par la portion  $OA$  de l'échelle avec le mur. L'extrémité  $B$  de l'échelle glisse sur le sol. L'échelle est telle que  $OA = AB = l$ .



1. Exprimer les vecteurs vitesse  $\vec{v}_A$  et accélération  $\vec{a}_A$  du point  $A$  dans la base polaire en fonction de  $l$ ,  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\ddot{\alpha}$ .
2. Exprimer dans la base cartésienne les composantes des vecteurs vitesse  $\vec{v}_B$  et  $\vec{a}_B$  du point  $B$ .

### Exercice 8 : La ronde d'un poisson rouge

Un poisson rouge se promène dans son bocal. Le mouvement de son centre d'inertie  $M$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est décrit par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

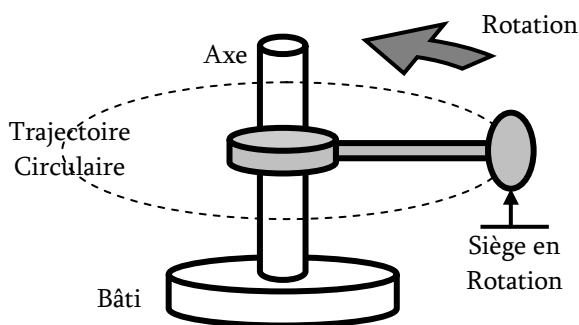


( $\omega$  et  $R$  désignent deux constantes positives)

1. Etablir l'équation paramétrique de la trajectoire du centre d'inertie du poisson et préciser sa nature.
2. Déterminer le vecteur vitesse correspondant (cartésienne). Calculer sa norme. Quelle caractéristique le mouvement présente-t-il et que représente la constante  $\omega$  ?
3. Etablir une relation simple entre les vecteurs position  $\vec{OM}$  et accélération  $\vec{a}$  (toujours en cartésienne)
4. Refaire tous ces calculs en coordonnées polaires : trouver les expressions de  $r$  et de  $\theta$ , puis de  $\vec{v}$  et de  $\vec{a}$  et la relation entre  $\vec{OM}$  et  $\vec{a}$ .
5. Las d'effectuer toujours le même trajet, le poisson décide d'ajouter une petite composante verticale  $z(t) = v_0 t$  au mouvement précédent ( $v_0$  est une constante positive). Quelle est alors la nature du mouvement du centre d'inertie du poisson ?
6. Et si il rajoute une composante  $z(t) = z_0 \cos(\omega_z t)$  ? Quelle est la nature du mouvement ?

**Exercice 9 : Centrifugeuse**

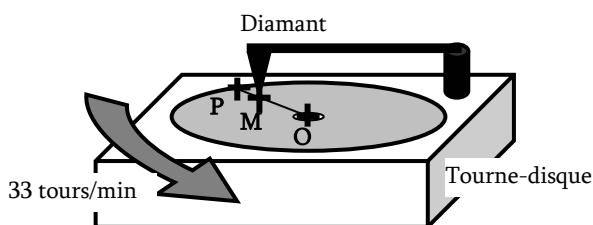
Pour entraîner les astronautes aux fortes accélérations subies lors du décollage et lors de la rentrée dans l'atmosphère, on les place dans un siège situé à l'extrémité d'un bras en rotation. Un point M du sujet (par exemple son œil gauche) décrit dans le référentiel lié au sol un cercle de rayon  $R = 5,0\text{m}$  à la vitesse angulaire  $\omega$ .



1. Pourquoi l'énoncé précise-t-il « un point du sujet », et non pas simplement « le sujet » ?
2. Quelle est la valeur de la vitesse angulaire  $\omega = \omega_0$  (en tour/seconde) pour laquelle l'accélération du point M dans le référentiel lié au sol est égale à  $30 \text{ m.s}^{-2}$  ?
3. Quelle est alors la vitesse du point M dans le référentiel lié au sol ? (Donner la valeur en m/s et en km/h)
4. Quelle est alors l'accélération du point M dans le référentiel lié au siège ?
5. Partant de la vitesse nulle, la valeur  $\omega_0$  est atteinte au bout de 10s, et on suppose que entre  $t = 0$  et  $t = 10\text{s}$ , la vitesse angulaire est une fonction linéaire du temps. Déterminer le vecteur accélération à la date  $t_1 = 5\text{s}$ .

**Exercice 10 : Rotation d'un tourne-disque**

Un tourne-disque, posé sur une table fixe (choix du référentiel du laboratoire R) comporte un plateau de centre O, de rayon  $R = 16\text{cm}$  tournant à la vitesse de  $33 \text{ tours.min}^{-1}$  supposée constante.



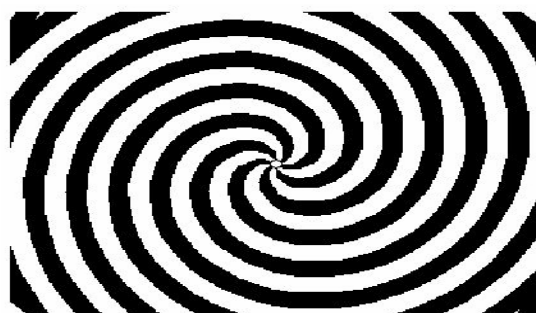
1. Quel est le mouvement d'un point M du plateau tel que  $OM=r=10\text{cm}$  dans R ?
2. Quelle est la vitesse angulaire  $\omega_0$  de rotation du point M en  $\text{rad.s}^{-1}$  ou en  $^\circ.\text{s}^{-1}$  dans R ?
3. Quelle est la vitesse instantanée du point M et celle d'un point P de la périphérie du plateau dans R ?

4. Quelle est la distance parcourue par le point M en  $t_1=2\text{min}30\text{s}$  dans R ? Quelle est la valeur de l'angle balayé par le rayon OM pendant ces 2min30s ?
5. Quel est le vecteur accélération du point M à la date  $t_1$  dans R ?
6. A l'instant  $t_1$ , une phase de freinage débute et le plateau s'immobilise à  $t_2=2\text{min}40\text{s}$ . Dans cette phase,  $\omega$  est donné par  $\alpha-\beta t$ . Déterminer les paramètres de freinage  $\alpha$  et  $\beta$ . Quels sont la vitesse instantanée du point M et le vecteur accélération à la date  $t$  dans R ?
7. Faire l'AN à  $t_3 = 2\text{min}35\text{s}$  pour am.

**Exercice 11 : Spirale d'Archimède**

Un disque D de centre O tourne dans le plan (Oxy) à vitesse angulaire constante  $\omega_0$  autour de l'axe (Oz). Un mobile ponctuel M part de O à l'instant  $t = 0$  et se déplace à vitesse constante le long d'un rayon du disque :  $\vec{v}(M/D) = \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_r$  (avec  $v_0 > 0$ ).

L'étude du mouvement guidé de M peut s'effectuer dans deux référentiels : le référentiel terrestre  $\mathcal{R}(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  ou le référentiel du disque  $D(0; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .



Un exemple de spirale. Ressemble-t-elle à la nôtre ?

1. Représenter le disque et tous les vecteurs des bases définies ci-dessus (on placera le point M entre le centre et le bord du disque pour la clarté du schéma)
2. Considérons le mouvement de M par rapport au réf  $\mathcal{R}$ . Redémontrer les expressions générales des vecteurs position, vitesse et accélération du point M en fonction de  $r, \theta$  et de leurs dérivées temporelles successives :
  - dans la base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
  - dans la base cylindro-polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$
 Ces expressions sont-elles équivalentes ? Quelle est la base la mieux adaptée pour résoudre ce problème ?
3. Donner, en coordonnées polaires, les équations horaires de M :  $r(t)$  et  $\theta(t)$ . Vous exprimerez en fonction de  $v_0, \omega_0$  et  $t$ , en tenant compte du caractère guidé de M sur un rayon du disque à la vitesse  $\vec{v}_0$

- En déduire l'équation et tracer l'allure de la trajectoire dans le référentiel terrestre  $\mathfrak{R} (0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Montrer que  $r$  est incrémenté d'une longueur constante  $d$  à chaque tour du disque.
- Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$ ,  $\vec{v}(M/\mathfrak{R})$  et  $\vec{a}(M/\mathfrak{R})$  en coordonnées polaires dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ , en fonction de  $v_0$ ,  $\omega_0$  et  $t$ .
- Quelle est la trajectoire et l'accélération  $\vec{a}(M/D)$  dans le référentiel du disque ?

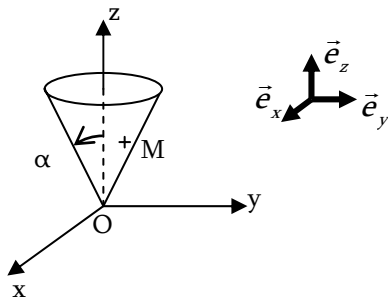
## Mouvement 3D – Bases Quelconques

### Exercice 12 : Mouvement sur un cône

#### Présentation du problème :

On étudie le mouvement d'un point  $M$  dans le référentiel  $\mathfrak{R} = (0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t)$ .  $M$  se déplace sur un cône comme représenté sur la figure ci-contre. On utilisera les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . On connaît l'équation horaire donnant l'angle  $\theta(t) = \omega(t)t = \omega_0 t \frac{z_0}{z(t)}$ , ainsi que la hauteur initiale

$z(0)=z_0$  et l'angle du cône  $\alpha$ .



#### Première partie : le point reste à $z = z_0$ constante

- Reproduire la figure et représenter pour le point  $M$  les vecteurs de la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ , en laissant les traits de constructions permettant de tout définir clairement.
- Si le point  $M$  reste au contact du cône, donner la relation liant  $r(t)$ ,  $z(t)$ , et l'angle  $\alpha$ .
- Supposons un instant que le point reste à la même hauteur  $z_0$  et donc au même rayon  $r_0$  correspondant, Exprimer les coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{v}(M/\mathfrak{R})$  en fonction de  $r$  et de  $\theta$ . En déduire l'expression de la vitesse orthoradiale  $v_\theta$  correspondante. Combien de temps met-il pour faire un tour complet ?
- Et si il est la hauteur  $z_0/2$  ? Donner  $v_\theta$  correspondante. Combien de temps met-il ? Interpréter.

#### Seconde partie : le point chute à $v_z = v_{z0}$ constante

On suppose maintenant que le point tombe de la hauteur initiale  $z(0)=z_0$  avec une vitesse verticale constante  $v_{z0}<0$ .

- Exprimer l'équation horaire de  $z(t)$ , puis en déduire toutes les autres équations horaires.
- Représenter l'allure de ces coordonnées en fonction du temps, ainsi que l'allure de  $\omega(t)$ . On note  $t_f$  l'instant où le point atteint le fond. Le calculer.
- Exprimer les coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{v}(M/\mathfrak{R})$  tout d'abord en fonction de  $(r, \theta, z)$ , puis en fonction de  $z_0$ ,  $v_{z0}$ ,  $\omega_0$ ,  $\alpha$  et  $t$ .
- Exprimer les coordonnées du vecteur accélération  $\vec{a}(M/\mathfrak{R})$  tout d'abord en fonction de  $(r, \theta, z)$ , puis en fonction de  $z_0$ ,  $v_{z0}$ ,  $\omega_0$ ,  $\alpha$  et  $t$ .
- Représenter pour le point  $M$  les vecteurs  $\vec{v}(M/\mathfrak{R})$  et  $\vec{a}(M/\mathfrak{R})$  sur 2 schémas différents (faire un zoom et représenter chacune des composantes), ainsi que la trajectoire (sur le même schéma que la vitesse).
- Interpréter chacune des composantes de ces vitesse et accélération (sens et direction).

**TD ME1 – Cinématique du Point**

**Correction 1.1 : Mouvement 1D d'un point**

- $x = \alpha$ ,  $v = \frac{dx}{dt} = 0$ ,  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$
- $x = \alpha t + b$ ,  $v = \frac{dx}{dt} = \alpha$ ,  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$
- $x = \alpha t^2$ ,  $v = \frac{dx}{dt} = 2\alpha t$ ,  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 2\alpha$
- $x = \alpha \cos(\omega t)$ ,  $\begin{cases} v = \frac{dx}{dt} = -\alpha \omega \sin(\omega t) \\ a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha \omega^2 \cos(\omega t) \end{cases}$
- $v = \alpha$ ,  $a = \frac{dv}{dt} = 0$ ,  $x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) \cdot dt = x_0 + \alpha t$
- $v = \alpha t + b$ ,  $a = \frac{dv}{dt} = \alpha$ ,  $x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) \cdot dt = x_0 + \frac{\alpha}{2} t^2 + bt$
- $a = \alpha$ ,  $\begin{cases} v(t) = v(0) + \int_0^t \alpha \cdot dt = v_0 + \alpha t \\ x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) \cdot dt = x_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \end{cases}$
- $a = \alpha t + b$ ,  $\begin{cases} v(t) = v(0) + \int_0^t (\alpha t + b) \cdot dt = v_0 + \frac{\alpha}{2} t^2 + bt \\ x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) \cdot dt = x_0 + v_0 t + \frac{b}{2} t^2 + \frac{\alpha}{6} t^3 \end{cases}$

**Correction 1.2 : Mouvement rectiligne d'une voiture**

- $\forall t \in [0, \tau_1]$ ,  $\begin{cases} a(t) = a_1 > 0 \\ v(t) = \cancel{v(0)} + \int_0^t a_1 \cdot dt = a_1 t \\ x(t) = \cancel{x(0)} + \int_0^t a_1 t \cdot dt = \frac{a_1}{2} t^2 \end{cases}$   
 $\Rightarrow \begin{cases} v_1 = v(\tau_1) = a_1 \tau_1 \\ x_1 = x(\tau_1) = \frac{a_1 \tau_1^2}{2} \end{cases}$   
 $\forall t \in [\tau_1, \tau_1 + \tau_2]$ ,
- $\begin{cases} a(t) = a_2 < 0 \\ v(t) = v(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t a_2 \cdot dt = v_1 + a_2(t - \tau_1) \\ x(t) = x(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t v(t) \cdot dt = x_1 + v_1(t - \tau_1) + \frac{a_2}{2}(t - \tau_1)^2 \end{cases}$   
 $\Rightarrow \begin{cases} v_2 = v(\tau_1 + \tau_2) = a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2 \\ x_2 = x(\tau_1 + \tau_2) = x_1 + v_1 \tau_2 + \frac{a_2 \tau_2^2}{2} = \frac{a_1 \tau_1^2}{2} + a_1 \tau_1 \tau_2 + \frac{a_2 \tau_2^2}{2} \end{cases}$   
 $\forall t \in [\tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3]$ ,
- $\begin{cases} a(t) = a_3 < 0 \\ v(t) = v(\tau_1 + \tau_2) + \int_{\tau_1 + \tau_2}^t a_3 \cdot dt = v_2 + a_3(t - \tau_1 - \tau_2) \\ x(t) = x(\tau_1 + \tau_2) + \int_{\tau_1 + \tau_2}^t v(t) \cdot dt = x_2 + v_2(t - \tau_1 - \tau_2) + \frac{a_3}{2}(t - \tau_1 - \tau_2)^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} v_3 = v(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2 + a_3 \tau_3 = 0 \\ x_3 = x(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = x_2 + v_2 \tau_3 + \frac{a_3 \tau_3^2}{2} = d = \frac{a_1 \tau_1^2}{2} + \frac{a_2 \tau_2^2}{2} + \frac{a_3 \tau_3^2}{2} + a_1 \tau_1(\tau_2 + \tau_3) + a_2 \tau_2 \tau_3 = 257m \end{cases}$$

$$a_3 = \frac{a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2}{-\tau_3} = -22 \text{ms}^{-2}$$

**Correction 1.3 : Distance d'arrêt**

- On a  $\begin{cases} \forall t \in [0, t_{\text{réaction}}], a(t) = 0 \\ \forall t \in [t_{\text{réaction}}, t_{\text{arrêt}}], a(t) = -a_0 = -7.5 \text{m} \cdot \text{s}^{-2} < 0 \end{cases}$
- Donc  $\begin{cases} \forall t \in [0, t_{\text{réaction}}], v(t) = v(0) + \int_0^t 0 \cdot dt = v_0 \\ \forall t \in [t_{\text{réaction}}, t_{\text{arrêt}}], v(t) = v(t_{\text{réaction}}) + \int_{t_{\text{réaction}}}^t -a_0 \cdot dt = v_0 - a_0(t - t_{\text{réaction}}) \end{cases}$
- Et Puisque  $v(t_{\text{arrêt}}) = 0 = v_0 - a_0(t_{\text{arrêt}} - t_{\text{réaction}}) \Rightarrow t_{\text{arrêt}} = t_{\text{réaction}} + \frac{v_0}{a_0} = 4,6 \text{s}$
- Ainsi :  $d = x(t_{\text{arrêt}}) = x(0) + \int_0^{t_{\text{réaction}}} v_0 \cdot dt + \int_{t_{\text{réaction}}}^{t_{\text{arrêt}}} (v_0 - a_0(t - t_{\text{réaction}})) \cdot dt$
- Ce qui donne  $d = v_0 t_{\text{arrêt}} - \frac{a_0}{2} (t_{\text{arrêt}} - t_{\text{réaction}})^2 = d = v_0 t_{\text{réaction}} + \frac{v_0^2}{2a_0} = 78 \text{m}$

**Correction 1.4 : Parachutiste**

- Le parachute s'ouvre à  $t_{\text{open}}$ , alors  $\begin{cases} \forall t \in [t_{\text{open}}, t_{\text{sol}}], a(t) = +a_0 > 0 \\ v(t_{\text{open}}) = v_{\text{lim}} = -200 \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \\ x(t_{\text{open}}) = z_{\text{min}} \end{cases}$
- Et :  $\begin{cases} \forall t \in [t_{\text{open}}, t_{\text{sol}}], v(t) = v(t_{\text{open}}) + \int_{t_{\text{open}}}^t a_0 \cdot dt = v_{\text{lim}} + a_0(t - t_{\text{open}}) \\ \forall t \in [t_{\text{open}}, t_{\text{sol}}], z(t) = z(t_{\text{open}}) + \int_{t_{\text{open}}}^t v(t) \cdot dt = z_{\text{min}} + v_{\text{lim}}(t - t_{\text{open}}) + \frac{a_0}{2}(t - t_{\text{open}})^2 \end{cases}$
- Il nous faut  $v(t_{\text{sol}}) = v_{\text{sol\_max}} = -5 \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = v_{\text{lim}} + a_0(t_{\text{sol}} - t_{\text{open}})$
- Ce qui correspond à un temps de freinage  $\Delta t_{\text{min}} = (t_{\text{sol}} - t_{\text{open}}) = \frac{v_{\text{sol\_max}} - v_{\text{lim}}}{a_0} = 6,5 \text{s}$
- Et ainsi  $z_{\text{min}} = -v_{\text{lim}} \cdot \Delta t_{\text{min}} - \frac{a_0}{2} \cdot \Delta t_{\text{min}}^2 = 666 \text{m}$

**Correction 1.5 : Mouvement rectiligne particulier**

- $\vec{v} = \left( \frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_{\text{Rt}} = \left( \frac{d\overline{OA}}{dt} \right)_{\text{Rt}(\text{fixe})} + \left( \frac{d\overline{AM}}{dt} \right)_{\text{Rt}} = \left( \frac{d\overline{AM}}{dt} \right)_{\text{Rt}}$
- On intègre :  $\left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\text{Rt}} = \vec{a} = -a \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{v}_{(t)} = -at \cdot \vec{u} + \vec{v}_0$   
 Et  $\left( \frac{d\overline{AM}}{dt} \right)_{\text{Rt}} = \vec{v} = (-at + v_0) \vec{u} \Rightarrow \overline{AM}_{(t)} = \left( \frac{-at^2}{2} + v_0 t \right) \vec{u} + \vec{0}$
- On cherche le max de  $\|\overline{AM}_{(t)}\| = \left( \frac{-at^2}{2} + v_0 t \right)$  en dérivant  $\frac{d\overline{AM}}{dt} = v(t) = -at + v_0 = 0$ , atteint en  $t = \frac{v_0}{a}$ .

On a alors  $AM_{\max} = \left( \frac{-a}{2} \left( \frac{v_0}{a} \right)^2 + v_0 \frac{v_0}{a} \right) = \frac{v_0^2}{2a}$

Il faut donc  $AM_{\max} = \frac{v_0^2}{2a} \geq AB = D\sqrt{2} \Rightarrow v_0^2 \geq 2aD\sqrt{2}$

**Correction 2.1 : Description de mouvements**

a)  $\begin{cases} x(t) = t+1 \\ y(t) = 3t \\ z(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = 1m.s^{-1} \\ v_y(t) = 3m.s^{-1} \\ v_z(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$

→ Mouvement Linéaire

b)  $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = 2m.s^{-1} \\ v_y(t) = 8t \\ v_z(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 8m.s^{-2} \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$

→ Mouvement Parabolique

c)  $\begin{cases} x(t) = R(\omega t - \sin \omega t) \\ y(t) = R(1 - \cos \omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = R\omega(1 - \cos \omega t) \\ v_y(t) = R\omega \sin \omega t \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_x(t) = R\omega^2 \sin \omega t \\ a_y(t) = R\omega^2 \cos \omega t \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$$

→ Cycloïde = mouvement d'un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur une droite (par exemple un point sur le pneu d'une roue de vélo qui avance)

**Correction 2.2 : Trajectoire d'un ballon-sonde**

1. Vecteur  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z/\tau \\ v_0 \end{bmatrix}_{CART}$ , → 2 équations:  $\begin{cases} \dot{x} = z/\tau \\ \dot{z} = v_0 \end{cases}$

2. On intègre:  $\begin{cases} x(t) = x(\theta) + \int_0^t \left( \frac{v_0 t}{\tau} \right) \cdot dt = \frac{v_0 t^2}{2\tau} \\ z(t) = z(\theta) + \int_0^t v_0 \cdot dt = v_0 t \end{cases}$

3. Cela donne une trajectoire d'équation  $x = \frac{z^2}{2v_0\tau}$

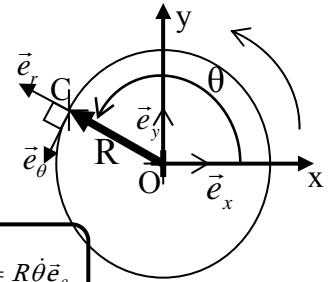
→ Parabole passant par l'origine

4. On a  $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_0 t^2}{2\tau} \\ v_0 t \end{bmatrix}_{CART}$ ,  $\vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_0 t}{\tau} \\ v_0 \end{bmatrix}_{CART}$  et  $\vec{a} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_0}{\tau} \\ 0 \end{bmatrix}_{CART}$

**Correction 3.1 : Mouvement circulaire**

Méthode complète d'étude :

- Syst étudié : Point C
- Référentiel :  $\mathfrak{R}(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, t)$
- Syst de coordonnées adapté : Ici, les coordonnées POLAIRES  $(r, \theta)$ , car pour un mouvement circulaire, les équations seront plus simples



4. Résolution

Position :  $\vec{r}(C/\mathfrak{R}) = \vec{OC}(t) = R\vec{e}_r(t)$

Vitesse :  $\vec{v}(C/\mathfrak{R}) = \left( \frac{d\vec{OC}(t)}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Accélération :  $\vec{a}(C/\mathfrak{R}) = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

→ Accélération Toujours ⊥ à la vitesse

Question 3 : Pour accélérer, il faut  $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ , pour ralentir  $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$ . Ici,  $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ , donc la norme de la vitesse reste constante au cours du mouvement (circulaire uniforme)

**Correction 3.2 : Spirale logarithmique**

On a  $\vec{r}(M/\mathfrak{R}) = R\vec{e}_r(t) = r_0 e^{\omega t} \cdot \vec{e}_r(t) = r_0 e^{\omega t} \cdot \vec{e}_r(t)$

Donc  $\vec{v}(M/\mathfrak{R}) = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix}_{POL} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix}_{POL} = \begin{bmatrix} r_0\omega \cdot e^{\omega t} \\ r_0 e^{\omega t} \cdot \omega \end{bmatrix}_{POL}$

Puisque  $v_r = v_\theta$ , alors l'angle entre  $\vec{r}(M/\mathfrak{R})$  et

$\vec{v}(M/\mathfrak{R})$  est  $\frac{\pi}{4} rad = 45^\circ$

Et  $\vec{a}(M/\mathfrak{R}) = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \end{bmatrix}_{POL} = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{bmatrix}_{POL} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2r_0\omega^2 e^{\omega t} \end{bmatrix}_{POL}$

**Correction 4.1 : Mouvement hélicoïdal**

1. On a  $\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) \\ z(t) = k \cdot t \end{cases}$ , donc  $\begin{cases} r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = R \\ \theta(t) = \text{Arc tan} \left( \frac{y}{x} \right) = \omega t, \\ z(t) = k \cdot t \end{cases}$

r = constante : le pt reste sur le cylindre d'axe Oz et de rayon R  
Mouvement = superposition d'un mouvement circulaire dans le plan (r,θ), et d'un mouvement linéaire suivant l'axe Oz.

2. Vitesse  $\vec{v}(M/\mathfrak{R}) = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{CYL} = \begin{bmatrix} 0 \\ R\omega \\ k \end{bmatrix}_{CYL}$

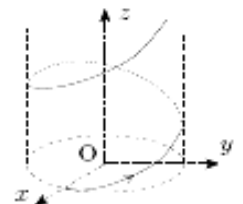
→ Norme  $\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\| = \sqrt{R^2\omega^2 + k^2}$

Accélération :  $\vec{a}(M/\mathfrak{R}) = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}_{CYL} = \begin{bmatrix} -R\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{CYL}$

3. Trajectoire :

4. Angle  $\alpha = \text{Arc tan} \left( \frac{\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}}{v_z} \right)$

Donc  $\alpha = \text{Arc tan} \left( \frac{R\omega}{k} \right) = \text{cstte}$



## SOLUTION des EXERCICES – ME1 – Feuille 2/2

### Supplément EXERCICES – ME1

#### Exercice 1 : Distance de sécurité ?

1. Avant l'arrêt, on a pour la première voiture :

$$\begin{cases} a(t) = -a = -7.5 \text{ m.s}^{-1} < 0 \\ v(t) = v(0) + \int_0^t -a \cdot dt = v_0 - at \\ x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) \cdot dt = d + v_0 t - \frac{a}{2} t^2 \end{cases}$$

Et pour la 2<sup>de</sup> :

$$\begin{cases} \forall t > t_r, \quad a(t) = -b = -6 \text{ m.s}^{-1} < 0 \\ v(t) = v(t_r) + \int_{t_r}^t -b \cdot dt = v_0 - b(t - t_r) \\ x(t) = x(t_r) + \int_{t_r}^t v(t) \cdot dt = v_0 t_r + v_0(t - t_r) - \frac{b}{2}(t - t_r)^2 \end{cases}$$

La 1<sup>ere</sup> s'arrête au bout de  $v(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0}{a}$ , ce qui

correspond à une distance  $x(t_1) = d + \frac{v_0^2}{2a}$

La 2<sup>de</sup> s'arrête au bout de  $v(t) = 0 \Leftrightarrow t_2 = t_r + \frac{v_0}{b}$ , ce qui

correspond à une distance  $x(t_2) = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2b}$

Il n'y a pas collision si  $x(t_1) > x(t_2) \Leftrightarrow d > v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2b} - \frac{v_0^2}{2a}$

2. AN :  $d = 33 \text{ m}$  : c'est très faible

3. En comparaison aux distances d'arrêt de chacune des voitures prises séparément :  $d_1 = x(t_1) - d = \frac{v_0^2}{2a} = 60 \text{ m}$ , et

$d_2 = x(t_2) - v_0 t_r = \frac{v_0^2}{2b} = 75 \text{ m}$  (2 valeurs calculées sans temps de réaction, qui nous rajoute  $d_r = v_0 t_r = 18 \text{ m}$ ) Le freinage de la première voiture laisse de la place à la seconde...

4. Si les deux ont même décélération, il suffit de se placer à distance  $d$  correspondant à la distance parcourue pendant le temps de réaction de la 2<sup>de</sup> voiture :  $d = d_r = v_0 t_r = 18 \text{ m}$ , ce qui serait vraiment juste dans la pratique...

#### Exercice 2 : De l'utilité de la ceinture de sécurité ?

On note a l'accélération constante (vitesse décroissant linéairement). En intégrant,  $v = v_0 + a \cdot t$ , donc au bout de l'impact de durée  $\tau$ ,  $v(\tau) = 0$

Et  $a = \frac{-v_0}{\tau}$ , donc  $\dot{x} = v = v_0 - \frac{v_0}{\tau} \cdot t$  et  $x = v_0 t - \frac{v_0}{2\tau} \cdot t^2$  (CI nulle)

Ainsi,  $d = \frac{v_0 \tau}{2}$  et l'accélération :  $a = \frac{-v_0}{\tau} = \frac{-v_0^2}{2d} = -98 \text{ m.s}^{-2}$

→ C'est une valeur très importante, on a intérêt à être bien accroché. La ceinture retient de manière très forte les personnes à l'intérieur de la voiture, c'est d'ailleurs pour cela que les accidentés sortent d'un accident avec une brûlure au niveau de la ceinture (plus au niveau de l'épaule en général).

#### Exercice 3 : Mouvement rectiligne exponentiel

- Dimensions :  $[a] = \text{L (en m) et } [\tau] = \text{T (en s)}$
- Au bout d'un temps très long,  $x$  tend vers  $a$

3. Vitesse moyenne :

$$\langle v \rangle = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot dt}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{a}{t_2 - t_1} [\exp(-0,4) - \exp(-0,6)] = 0,608 \frac{a}{\tau}$$

4.  $t = -\tau \ln\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ , on en déduit avec la courbe  $a = 100 \text{ cm}$

On peut tracer  $t$  en fonction de  $\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ , qui doit être une fonction linéaire, et on peut en déduire que  $\tau = 2 \text{ s}$ .

#### Exercice 4 : Mouvements rectilignes simultanés

1. Vitesse Piéton :  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \end{bmatrix}_{\text{SR}}$ , Position :  $\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 t + 0 \end{bmatrix}_{\text{SR}}$ . Il n'y a pas collision si le piéton passe le pt  $(x,y)=(0,L)$  avant la voiture :

$$t_L = t_{\text{passage}_{L\_piéton}} = \frac{L}{v_0} \leq t_{\text{passage}_{L\_voiture}} = \frac{D}{V} \Rightarrow v_0 \geq \frac{LV}{D}$$

2. Vitesse Piéton :  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \cdot \sin \varphi \\ v_1 \cdot \cos \varphi \end{bmatrix}_{\text{SR}}$ , donc  $\vec{r} = \begin{bmatrix} v_1 t \cdot \sin \varphi + 0 \\ v_1 t \cdot \cos \varphi + 0 \end{bmatrix}_{\text{SR}}$ .

Donc pour le piéton :  $t_{L\_piéton} = \frac{L}{v_1 \cos \varphi}$

Et pour la voiture :  $t_{L\_voiture} = \frac{D + L \tan \varphi}{V} \geq t_{L\_piéton} = \frac{L}{v_1 \cos \varphi}$

Cela donne la condition :  $v_1 \geq \frac{LV}{D \cos \varphi + L \sin \varphi} = f(\varphi)$

3. On cherche le min de  $v$  en fonction de  $\varphi \rightarrow$  on cherche donc le max du dénominateur  $g(\varphi) = D \cos \varphi + L \sin \varphi \rightarrow$  on dérive :

$$\frac{dg(\varphi)}{d\varphi} = -D \sin \varphi + L \cos \varphi = 0 \Rightarrow \tan \varphi_{\min} = \frac{L}{D}$$

$$\text{et } \cos \varphi_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_{\min}}} = \frac{D}{\sqrt{D^2 + L^2}}$$

$$\text{Donc : } v_{\min} = \frac{LV}{\cos \varphi (D + L \tan \varphi)} = \frac{LV}{\sqrt{D^2 + L^2}}$$

#### Exercice 5 : Equations horaires (2D et 3D)

Rmq : En 3D, il faut 2 équations pour définir une droite...

- Mouvement rectiligne uniforme (droite  $z=3x, y=2$ )
- Mouvement rectiligne uniformément décéléré (droite  $x=z=0$ )
- Mvt rectiligne uniformément accéléré (droite  $y=0, x=-5x$ )
- Mvt rectiligne uniformément accéléré (droite  $y=0, x=2$ )
- Mvt parabolique uniformément accéléré ( $x=4, y=-16z^2$ )
- Mvt rectiligne sinusoïdal (droite  $y=3, z=0$ , autour de  $x=0$ )
- Mvt plan sinusoïdal ( $z=0, x=4\sin(\omega y)$ )
- Mvt plan... faire un schema...
- Mvt plan sinusoïdal ( $z=0, x=\sin^2(\omega y)=1-\cos(2\omega y)$ )
- Mvt circulaire dans le plan  $z=0$ , rayon  $R$ , centre  $(x,y)=(0,0)$
- Mvt hélicoïdal (voir exercice 4.1 du TD) = composition d'un mvt circulaire dans le plan  $xy$  et d'un mvt linéaire suivant  $z$
- Composition d'un mvt circulaire dans le plan  $xy$  et d'un mvt sinusoïdal suivant l'axe des  $z$ ... Faire le schéma pour mieux le visualiser...

### Exercice 7 : Echelle Double

- On a  $\vec{v}_A = \frac{d\vec{OA}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l \sin \alpha \\ l \cos \alpha \end{bmatrix} \Big|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ -l\dot{\alpha} \sin \alpha \end{bmatrix}$   
 Et  $\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ -l\dot{\alpha} \sin \alpha \end{bmatrix} \Big|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} l\ddot{\alpha} \cos \alpha - l\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \\ -l\ddot{\alpha} \sin \alpha - l\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \end{bmatrix}$
- Pour B :  $\vec{v}_B = \frac{d\vec{OB}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 2l \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 2l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$   
 Et  $\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 2l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 2l\ddot{\alpha} \cos \alpha - 2l\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$

### Exercice 8 : La ronde d'un poisson rouge

- On élimine t :  $x^2 + y^2 = R$  → Cercle de rayon R, centre O.
- Vitesse  $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \Big|_{\text{CART}} = \begin{bmatrix} -\omega R \sin \omega t \\ \omega R \cos \omega t \end{bmatrix} \Big|_{\text{CART}}$   
 Norme :  $\|\vec{v}(M/\mathcal{R})\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega R$  → Mvt Uniforme  
 $\Omega$  représente la vitesse angulaire de rotation
- Accélération  $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \Big|_{\text{CART}} = \begin{bmatrix} -\omega^2 R \cos \omega t \\ -\omega^2 R \sin \omega t \end{bmatrix} \Big|_{\text{CART}} = -\omega^2 \vec{OM}$
- En polaire  $\begin{cases} r=R \\ \theta = \omega t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} = \begin{bmatrix} 0 \\ R\omega \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}}$   
 Et  $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} = \begin{bmatrix} -R\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} = -\omega^2 \vec{OM}$
- Avec une composante linéaire suivant z, il fait un mouvement hélicoïdal (voir exercice 4.1 du TD)
- Avec une composante alternative, il faut la représenter : une sinusoïde enroulée sur un cylindre.

### Exercice 9 : Centrifugeuse

- Un point du sujet : R différent → v et a différents
- Pour un mouvement circulaire uniforme, en coordonnées polaires, on a  $\vec{a}(M/\mathcal{R}_{\text{SOL}}) = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} = \begin{bmatrix} -R\omega_0^2 \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}}$   
 Donc  $\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{R}} = 2,45 \text{ rad.s}^{-1} = 0,39 \text{ tour.s}^{-1}$
- Vitesse en coord polaires :  $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} = \begin{bmatrix} 0 \\ R\omega_0 \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}}$   
 Donc  $v = 12,2 \text{ m.s}^{-1} = 44 \text{ km.h}^{-1}$
- Le pt M est immobile dans le réf du siège :  $\vec{a}(M/\mathcal{R}_{\text{SIEGE}}) = \vec{0}$
- On a  $\omega = \alpha \cdot t$  avec  $\alpha = 0,245 \text{ rad.s}^{-2}$   
 L'accélération est :  $\vec{a}(M/\mathcal{R}_{\text{SOL}}) = \begin{bmatrix} -R\alpha^2 t^2 \\ R\alpha \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} = \begin{bmatrix} -R\omega^2 \\ R\alpha \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}}$   
 Pour t = t<sub>1</sub> = 5s,  $\omega = 2,4 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\vec{a}(M/\mathcal{R}_{\text{SOL}}) = \begin{bmatrix} -7,5 \text{ m.s}^{-2} \\ 1,2 \text{ m.s}^{-2} \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}}$

### Exercice 11 : Spirale logarithmique

- Expressions générales des position, v et a en cartésienne :

$$\begin{cases} \vec{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Big|_{\text{CART}} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix} \Big|_{\text{CART}} \\ \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \Big|_{\text{CART}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix} \Big|_{\text{CART}} \\ \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta - r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{bmatrix} \Big|_{\text{CART}} \end{cases}$$

Et en coordonnées polaires : Expression beaucoup plus adapté, mais complètement équivalent :

$$\begin{cases} \vec{OM} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} = r \cdot \vec{e}_r \quad \text{puisque} \quad \begin{cases} \rightarrow \frac{d\vec{e}_r}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \rightarrow \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \vec{e}_r \end{cases} \\ \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} \\ \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} \end{cases}$$

- On a  $\vec{v}(M/D) = \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_r = \dot{r} \cdot \vec{e}_r$ , donc en intégrant l'expression :  $r(t) = r(\theta) + \int_0^t \dot{r}(t) \cdot dt = r(t) = v_0 t$   
 Et la vitesse angulaire du disque est constante :  $\omega_0 = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ ,  
 donc en intégrant,  $\Rightarrow \theta(t) = \theta(\theta) + \int_0^t \omega_0 \cdot dt = \theta(t) = \omega_0 t$
- Trajectoire : On élimine le temps →  $r = \frac{v_0}{\omega_0} \theta$ , cela nous fait une spirale d'espacement constant entre deux passages successifs :  $r(\theta + 2\pi) = \frac{v_0}{\omega_0} \theta + \frac{2\pi v_0}{\omega_0} = r(\theta) + d$  avec  $d = \frac{2\pi v_0}{\omega_0}$ .  
 A chaque tour, le rayon est incrémenté de d...

- Expression des vecteurs en base polaire :

$$\begin{cases} \vec{OM} = \begin{bmatrix} v_0 t \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} \\ \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_0 t \cdot \omega_0 \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} \\ \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} -v_0 t \cdot \omega_0^2 \\ 2v_0 \omega_0 \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} \end{cases}$$

- Dans le référentiel du disque :  $\begin{cases} \vec{OM} = \begin{bmatrix} v_0 t \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} \\ \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_{\text{disque}}} = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} \\ \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_{\text{disque}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{\text{POL}} \end{cases}$

Attention: Dans le référentiel du disque, les vecteurs  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  sont fixes, on n'a plus les mêmes expressions... On obtient une accélération nulle → Pour un observateur fixe par rapport au disque, la trajectoire de M est une droite