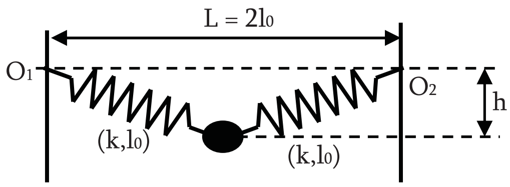
Supplément EXERCICES – ME2 – Dynamique du Point – Feuille 1/2

Appliquer le PFS

Exercice 1 : Masse suspendue par deux ressorts ?

Un objet considéré comme ponctuel, de masse m est maintenu par deux ressorts identiques, liés à deux tiges verticales distantes d'une longueur L. Les deux ressorts sont à spires non jointives avec une constante de raideur k et une longueur libre l_0. Les points de fixation O_1 et O_2 sont situés à la même hauteur, et la distance les séparant est $L = O_1O_2 = 2l_0$. A l'équilibre, l'objet est descendu d'une hauteur h par rapport à la ligne horizontale O_1O_2.

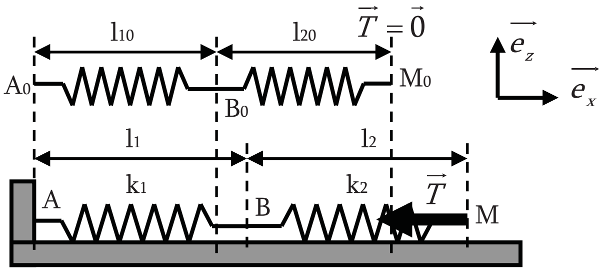


1. Faire l'inventaire des forces appliquées sur l'objet, et les représenter sur un schéma.
2. Appliquer le PFS et trouver la relation liant les longueurs l_1 et l_2 des ressorts à l'équilibre.
3. Déterminer alors la longueur l des ressorts en fonction de l_0 et de h. Faire l'application numérique.
4. Déterminer une expression donnant la raideur k des ressorts et calculer sa valeur.

Données : champ de pesanteur g_0 = 9,81m.s-2, m = 190g, l_0 = 10cm, h = 15cm.

Exercice 2 : Association série de ressorts

On relie 2 ressorts bout à bout, comme sur la figure ci-dessous : le premier (k_1, l_{10}) est relié à un mur fixe, le second (k_2, l_{20}) est relié à un point M de masse m que l'on écarte de la position de repos (on notera AM = l). Trouver le ressort (k_0, l_0) équivalent à cette association.



1. Définir le ressort idéal
2. Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent à cette association en fonction de k_1 et de k_2.
3. Qu'est-ce que cela deviendrait si on mettait les deux ressorts en "parallèle", avec une même longueur à vide l_0 ?

Appliquer le PFD – Coordonnées Cartésiennes

Exercice 3 : Distraction Polaire

Le pingouin Titus se laisse glisser sans vitesse initiale du haut d'une pente verglacée de longueur d, inclinée d'un angle α avec l'horizontale et dont l'extrémité inférieure se prolonge par un replat, verglacé lui aussi. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre, et on ne tiendra compte d'aucune force de frottement.

1. Etablir l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G du pingouin dans la phase de descente. Quelle est la nature de ce mouvement
2. Quelle est la durée de la descente proprement dite ?
3. Quelle est la nature du mouvement de G sur le replat ?

Données : α = 30°, d = 10m, g = $9{,}8 m.s^{-2}$.

Exercice 4 : Chute d'une goutte d'eau

On considère la chute verticale d'une goutte d'eau sphérique dans l'atmosphère.

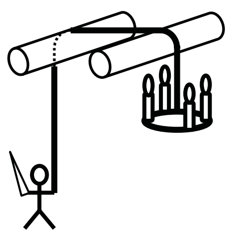
1. Au cours de sa chute, la goutte est soumise à une force de frottement visqueux proportionnelle à sa vitesse v et de valeur $f = 6\pi r\eta v$, avec r le rayon de la goutte et η la viscosité dynamique de l'air. Etablir l'équation différentielle du mouvement de la goutte
2. Déterminer la vitesse limite v_{lim} atteinte par la goutte.
3. La goutte étant initialement au repos, exprimer la vitesse v(t) à une date quelconque en fonction de v_{lim}, t et $\tau = \frac{v_{\lim}}{g}$. Tracer l'allure de v = f(t). Que représente τ ? Calculer sa valeur numérique.
4. Au bout de quelle durée la vitesse limite est-elle atteinte à 1% près ? Calculer la distance parcourue par la goutte au cours de cette durée.

Données ; masse volumique $\rho_{eau} = 1000 kg.m^{-3}$, $r = 50\mu m$, $\eta = 18{,}5.10^{-6} N.s.m^{-2}$, pesanteur $g = 9{,}8 m.s^{-2}$

Exercice 5 : Robin des bois

Robin des bois est en mauvaise posture. Il tente de s'enfuir en empoignant d'une main la corde qui supporte un chandelier. De l'autre main, il sectionne la corde qui est attachée au plancher et le chandelier tombe, ce qui propulse Robin vers un balcon situé un peu plus haut. On néglige tous les frottements.

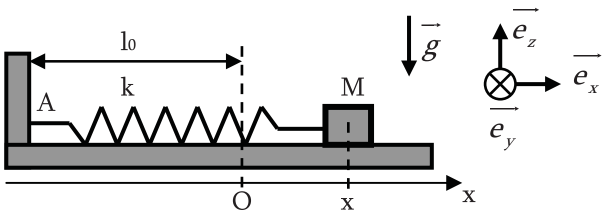
→ Déterminer l'accélération prise par Robin et la tension de la corde.



Données :
- Masse de Robin m_1=80kg
- Masse du chandelier m_2=250kg
- Intensité de la pesanteur g = $9{,}8 m.s^{-2}$.

Exercice 6 : Oscillation d'un ressort horizontal

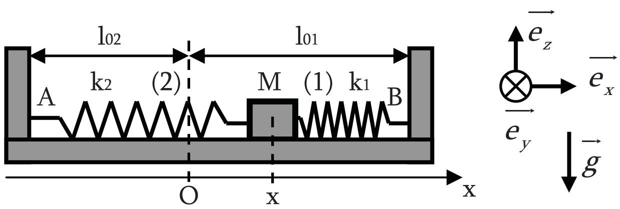
Le référentiel $\Re_G = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, t\right)$ est supposé galiléen. Un point matériel M de masse m est lié à un ressort horizontal, l'autre extrémité du ressort étant fixe en A. Dans son domaine d'élasticité, le ressort non tendu est caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide l_0. Le point M glisse sans frottement le long de l'axe $\left(0, \vec{e}_x\right)$ à partir de sa position d'équilibre située en O. Il est repéré sur cet axe par son abscisse $x = \overline{OM}$.



1. Etablir l'équation différentielle du mouvement de M. En déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations.
2. A l'instant t = 0, le point est abandonné sans vitesse initiale du point M_0 d'abscisse x_0. Déterminer l'équation horaire du mouvement x(t).
3. En déduire l'expression de la tension $\vec{T}$ du ressort. Justifier son qualificatif de « force de rappel élastique ».

Exercice 7 : Oscillation d'un point relié à deux ressorts

Le référentiel $\Re_G = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, t\right)$ est supposé galiléen. Un point matériel M de masse m est attaché à 2 ressorts (1) et (2) horizontaux, de raideurs k_1 et k_2, et de longueurs à vide l_{01} et l_{02}. reliés à deux points fixes A et B distants de $(l_{01}+l_{02})$. Le point M glisse sans frottement le long de l'axe $\left(0, \vec{e}_x\right)$ à partir de sa position d'équilibre située en O. Il est repéré sur cet axe par son abscisse $x = \overline{OM}$.

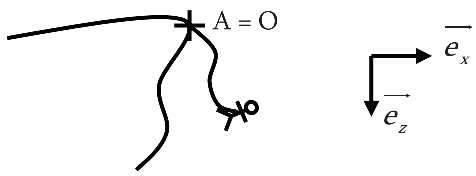


1. Justifier la position d'équilibre en O du point M.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement de M. En déduire la période T des oscillations et la raideur k du ressort équivalent à cette association.
3. A l'instant t = 0, le point est abandonné sans vitesse initiale du point M_0 d'abscisse x_0. Déterminer l'équation horaire du mouvement x(t).

Exercice 8 : Etude d'une corde d'escalade

Au cours de l'escalade d'une paroi rocheuse un grimpeur effectue une chute libre sans frottement, sans vitesse initiale d'une hauteur de L = 8m, avant que la corde de sécurité (L est sa longueur au repos) fixée en A se tende. On donne g = 9,81 m.s^{-1}.

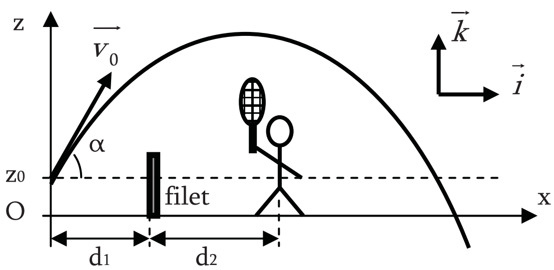
Tout le mouvement sera supposé vertical pour simplifier les expressions.



1. Calculer la vitesse v_L atteinte par ce grimpeur à l'instant où la corde commence à se tendre.
2. L'élasticité de la corde vaut E = 8% (sa longueur peut augmenter de 8%). Entre le moment où la corde commence à se tendre, et où elle atteint son maximum d'élasticité (arrêt complet du grimpeur pour t = t_B), on suppose qu'elle le soumet à une tension constante. Son accélération totale a_0 est donc constante. Exprimez-la et calculez-la.
3. La résistance à la rupture de cette corde vaut 25kN (2,5 tonnes). Cette valeur est-elle suffisante pour enrayer la chute ? La masse du grimpeur avec son équipement est m = 83kg. Une corde plus fine aurait-elle suffit ?

Exercice 9 : Le lob au tennis

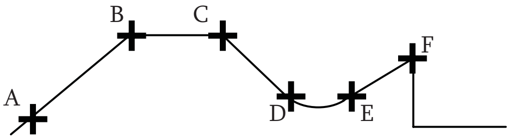
Au tennis, un lob est réussi lorsque la balle passe au-dessus de l'adversaire et retombe avant la ligne de fond de court (12m du filet). Le joueur 1, situé à d_1 = 2m du filet (de hauteur 1m), tape la balle à une hauteur z_0 = 30cm et lui communique une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ contenue dans un plan vertical, de valeur v_0=36km.h^{-1}, et formant un angle α=60° avec l'horizontale. On négligera les forces de frottement. On prendra g = 9,8m.s^{-2}.



1. Déterminer les équations horaires du centre d'inertie G de la balle dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{k}\right)$ représenté sur la figure. (la balle est frappée à la date t = 0).
2. En déduire l'équation de la trajectoire de la balle.
3. La balle passe-t-elle au dessus du filet ?
4. Le joueur 2 est de l'autre coté du filet. Il tend sa raquette verticalement pour essayer de toucher la balle : le tamis de sa raquette est alors situé à une hauteur h = 2,3m. A quelle distance du filet le joueur 2 doit-il se placer ?
5. Si le joueur 2 se trouve à une distance d_2 = 4m du filet, peut-il intercepter la balle ? Le lob est-il réussi ?
6. Caractériser le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la balle lors de son impact sur le sol.

Exercice 10 : Saut à ski

Un skieur aborde successivement les différentes parties d'une pente dont le profil est schématisé ci-contre.

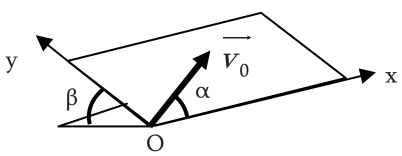


1. Il remonte à vitesse constante la piste AB inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale. Il est tracté par la perche d'un téléski qui exerce une force de traction ayant même direction que la perche. Elle forme un angle $\beta = 20°$ avec la pente. L'ensemble des forces de frottement exercées par la neige sur les skis et l'air sur le skieur est équivalent à une force unique $\overrightarrow{F_1}$ de valeur 65N, opposée au mouvement. Calculer la valeur de la force de traction exercée par la perche.
2. Arrivé au sommet de la pente en B, il lâche la perche avec une vitesse $3{,}2 m.s^{-1}$. Il est alors sur une surface plane et horizontale. Quelle distance va-t-il parcourir avant de s'arrêter, en admettant que l'ensemble des forces de frottement est équivalent à une force de valeur F_2=42N ?
3. Il aborde ensuite une pente CD inclinée d'un angle $\alpha' = 35°$ par rapport au plan horizontal. LA valeur des forces de frottement ,e peut plus être considérée comme constante et on admettra qu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse $F_3 = kv^2$, avec $k = 0{,}56 N.s^{-2}.m^{-2}$. Quelle vitesse limite v_{lim} le skieur peut-il atteindre ?
4. Il aborde un tremplin de saut EF incliné d'un angle γ=15° par rapport à l'horizontale. Pour simplifier l'étude, on ne prendra pas en compte les forces exercées par l'air. Par ailleurs, on considérera que sa vitesse en F vaut $25 m.s^{-1}$. Calculer la longueur du saut s'il retombe sur une surface plane et horizontale située à 5m au dessous de F.

Données : masse du skieur m = 80kg, pesanteur $g = 9{,}8 m.s^{-2}$.

Exercice 11 : Plan incliné

Un point matériel M, de masse m est lancée à l'instant t = 0 de l'origine O d'un support plan (Oxy) incliné d'un angle β par rapport à l'horizontal, et tel que l'axe (Ox) soit horizontal. Le vecteur vitesse initial $\overrightarrow{v_0}$ contenu dans le plan (Oxy) forme un angle α avec l'axe (Ox). Les frottements sur le support plan et avec l'air sont négligés.

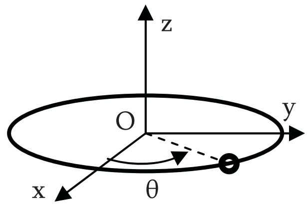


1. Ecrire le PFD appliqué à l'objet.
2. En déduire les équations horaires du mouvement en fonction de v0, g, α et β.
3. Déterminer l'équation de la trajectoire suivie et sa nature.
4. Examiner et commenter les cas limites β = 0 et β = π/2

Appliquer le PFD – Coordonnées Polaires

Exercice 12 : Anneau sur un guide circulaire

Un anneau ponctuel M de masse m est enfilé sur un cercle fixe de centre O et de rayon b placé horizontalement dans le plan (Oxy). A l'instant initial t = 0, une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ tangente au cercle est communiquée à l'anneau



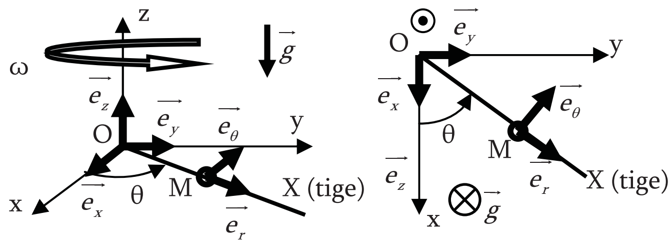
→ En sachant que l'anneau glisse sans frottement, déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$ du guide.

Exercice 13 : Coulissement sur une tige en rotation

Une tige rectiligne horizontale (OX) tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\theta}$ en restant dans le plan (Oxy). Un anneau M de masse m est enfilé sur cette tige et peut glisser sans frottement. On utilise les coordonnées polaires (r(t), θ(t)) pour décrire le mouvement de M.

A l'instant t = 0, l'anneau démarre sans vitesse initiale par rapport à la tige du point M_0 repéré par les coordonnées polaires : θ(0) = 0 et r(0) = r_0.

. La résistance au mouvement de l'air est négligeable et le champ de pesanteur uniforme : $\vec{g} = -g \cdot \vec{e_z}$ avec $g = \left\| \vec{g} \right\| > 0$.

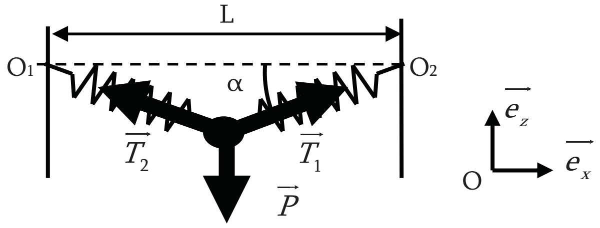


1. Effectuer le bilan des forces appliquées au point M par le milieu extérieur
2. Ecrire le PFD dans le référentiel terrestre, projeté dans la base cylindrique.
3. En déduire l'équation de 2^{nd} ordre vérifiée par r(t).
4. Etablir les équations horaires r(t). En déduire l'équation et l'allure de la trajectoire.
5. Déterminer la réaction de la tige sur l'anneau en fonction de t.
6. L'anneau est maintenant soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de masse raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide r_0. Le ressort est enfilé sur la tige, une extrémité est fixée en O et l'autre est attachée au point mobile M. Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige et discuter de la nature de celui-ci. Les CI sont inchangées.

SOLUTION des EXERCICES – ME2 – Feuille 1/2

Supplément EXERCICES – ME2

Exercice 1 : Masse suspendue par deux ressorts ?



1. Inventaire des forces : → Poids $\vec{P} = m\vec{g_0} = -mg_0 \cdot \vec{e_z}$

   → Tension Ressort 1 : $\vec{T_1} = -k\left(l_1 - l_0\right)\cdot\vec{e_1}$

   → Tension Ressort 2 : $\vec{T_2} = -k\left(l_2 - l_0\right)\cdot\vec{e_2}$

   Avec $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ des vecteurs unitaires suivant les ressorts

2. PFS dans $\Re = \left(O,\vec{e_x},\vec{e_z},t\right)$ galiléen appliqué à l'objet :

$$\vec{P}+\vec{T_1}+\vec{T_2}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\-mg_0\end{bmatrix}_{\Re}+\begin{bmatrix}-k\left(l_1-l_0\right)\cos\alpha\\+k\left(l_1-l_0\right)\sin\alpha\end{bmatrix}_{\Re}+\begin{bmatrix}+k\left(l_2-l_0\right)\cos\alpha\\+k\left(l_2-l_0\right)\sin\alpha\end{bmatrix}_{\Re}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\boxed{l_1=l_2=l}\\2k\left(l-l_0\right)\sin\alpha=mg_0\end{cases}$$

3. Th de Pythagore : $\boxed{l=l_1=l_2=\sqrt{l_0^2+h^2}=25cm}$

4. Et d'après le PFS : $\boxed{k=\dfrac{mg_0}{2\left(l-l_0\right)\sin\alpha}=\dfrac{mg_0 l}{2h\left(l-l_0\right)}=31\,N.m^{-1}}$

Exercice 2 : Association de ressorts

1. Ressort idéal : de masse négligeable et linéaire : par exemple pour le ressort 1 ici, on aurait $\vec{T_1}=-k\left(l_1-l_{10}\right)\vec{e_x}=\overrightarrow{F_{Ressort\to B}}$

2. Au niveau du point B : on a les forces qui sont égales (Projection du PFS sur B dans R galiléen) :

$$\overrightarrow{T_{1\to B}}+\overrightarrow{T_{2\to B}}=\vec{0}=-k_1\left(l_1-l_{10}\right)\vec{e_x}+k_2\left(l_2-l_{20}\right)\vec{e_x}$$

   Et la force en M est $\overrightarrow{T_{2\to M}}=-k_2\left(l_2-l_{20}\right)\vec{e_x}$

   Elles sont toutes égales en norme : $\overrightarrow{T_{1\to B}}=-\overrightarrow{T_{2\to B}}=\overrightarrow{T_{2\to M}}=\vec{T}$

   On peut alors remplacer cette association par un seul ressort appliquant la force : $\overrightarrow{T_{eq\to M}}=\vec{T}=-k_{eq}\left(\left(l_1+l_2\right)-\left(l_{10}+l_{20}\right)\right)\vec{e_x}$

$$\Rightarrow \vec{T}=-k_{eq}\left(\left(l_1-l_{10}\right)+\left(l_2-l_{20}\right)\right)\vec{e_x}$$

   Et $\dfrac{\vec{T}}{k_{eq}}=-\dfrac{\vec{T}}{k_1}-\dfrac{\vec{T}}{k_2}$ $\quad$ ➔ $\boxed{\dfrac{1}{k_{eq}}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}}$

3. Deux ressorts en parallèle de même l_0 ?

$$\overrightarrow{T_{eq\to M}}=\overrightarrow{T_{1\to M}}+\overrightarrow{T_{2\to M}}$$

$$\Rightarrow -k_{eq}\left(l-l_{eq0}\right)=-k_1\left(l-l_{10}\right)-k_2\left(l-l_{20}\right)$$

   Cela donne $\boxed{k_{eq}=k_1+k_2}$

   Rmq : lois analogues à celle des condensateurs…

Exercice 3 : Distraction Polaire

→ Même problème que le plan incliné, on définit une base avec $\overrightarrow{e_x'}$ tangent à la descente, vers le bas, et $\overrightarrow{e_y'}$ normal vers le haut. Les expressions sont alors simplifiées

1. Réf d'étude $\Re_G=\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z},t\right)$ supposé galiléen.

   Système : Pingouin de centre d'inertie G de masse m

   Base de projection : $B'=\left(0,\overrightarrow{e_x'},\overrightarrow{e_y'}\right)$

   Bilan des forces : → Poids $\vec{P}=-mg\cdot\vec{e_z}=\begin{bmatrix}mg\sin\alpha\\-mg\cos\alpha\end{bmatrix}_{B'}$

   → Réaction Support : $\vec{R}=\overrightarrow{R_N}+\cancel{\overrightarrow{R_T}}=\begin{bmatrix}0\\R_N\end{bmatrix}_{B'}$

   PFD dans R_G galiléen : $\vec{P}+\vec{R}=m\cdot\overrightarrow{a\left(M/\Re\right)}$

   D'où : $\begin{bmatrix}mg\sin\alpha\\-mg\cos\alpha\end{bmatrix}_{B'}+\begin{bmatrix}0\\R_N\end{bmatrix}_{B'}=\begin{bmatrix}m\ddot{x}'\\0\end{bmatrix}_{B'}$

   Ainsi : $\ddot{x}'=g\sin\alpha,\qquad \dot{x}'=gt\sin\alpha$

   Et $\boxed{x'(t)=x'(0)+\dfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha}$

   ➔ Mouvement rectiligne uniformément accéléré

2. Durée de la descente proprement dite : $\boxed{t=\sqrt{\dfrac{2d}{g\sin\alpha}}=2s}$

3. Sur le replat, $\vec{P}$ et $\overrightarrow{R_N}$ se compensent, le pingouin est un système pseudo-isolé. D'après le principe d'inertie, son mouvement est donc rectiligne uniforme.

Exercice 4 : Chute d'une goutte d'eau

1. PFD dans $\Re=\left(O,\vec{e_x},\vec{e_z},t\right)$ (avec z descendant) terrestre supposé galiléen, sur la goutte soumise à :

$$\begin{cases}\vec{P}=mg\cdot\vec{e_z}=\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho_{eau}g\cdot\vec{e_z},\\\vec{f}=-6\pi r\eta\vec{v}\end{cases}$$

   Donc : $m\left.\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\Re}+6\pi r\eta\vec{v}=mg\cdot\vec{e_z}$

   Puisque le mvt est vertical : $\boxed{\dfrac{m}{6\pi r\eta}\dot{v}_z+v_z=\dfrac{mg}{6\pi r\eta}}$

2. Vitesse limite v_{lim} quand la dérivée est nulle = solution particulière de l'équation avec second membre :

$$\boxed{v_{\lim}=v_z^{PART}=\frac{mg}{6\pi r\eta}=\frac{2r^2g\rho_{eau}}{9\eta}=0.29\,m.s^{-1}}$$

3. On réécrit l'équation différentielle avec v_{lim} :

   $\dfrac{v_{\lim}}{g}\dot{v}_z+v_z=v_{\lim}$ ou encore $\tau\dot{v}_z+v_z=v_{\lim}$ avec $\tau=\dfrac{v_{\lim}}{g}$.

   On résout : $\boxed{v_z(t)=v_{\lim}\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$ → Allure exponentielle.

   $\tau=0{,}03s$ est la constante de temps de l'exponentielle (temps caractéristique du phénomène…),

4. v_{lim} atteinte à 1% près au bout de $5\tau = 0{,}15s$.
Distance parcourue par la goutte : On intègre l'expression de la vitesse : $z(t)=z(0)+\int_0^t v_z(t)\cdot dt = z(0)+v_{\lim}t+v_{\lim}\tau e^{-t/\tau}$
Elle parcourt : $\boxed{d=v_{\lim}\times 5\tau+v_{\lim}\tau e^{-5}\simeq 3.5cm}$

Exercice 5 : Robin des bois

PFD sur Robin dans R galiléen : $\vec{P_1}+\vec{T_1}=m_1\cdot\vec{a_1}$

PFD sur le chandelier dans R galiléen : $\vec{P_2}+\vec{T_2}=m_2\cdot\vec{a_2}$

La corde est inextensible sans frottement, donc $\begin{cases}\vec{a_1}=-\vec{a_2}\\ \vec{T_2}=-\vec{T_1}\end{cases}$

Ainsi : $\begin{cases}-m_1g+T=m_1\cdot a\\ -m_2g+T=-m_2\cdot a\end{cases} \Rightarrow T=m_1\cdot(a+g)=m_2\cdot(-a+g)$

Ce qui nous donne $\boxed{a=\dfrac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\cdot g=5m.s^{-2}}$

Et la tension $\boxed{T=\dfrac{2m_1m_2}{m_2+m_1}\cdot g=1200N}$

Attention, il ne s'agit as tout à fait de la différence des forces appliquées par Robin et par le chandelier, car le mouvement de Robin « soulage » la corde… On n'est pas en statique ici.

Exercice 6 : Oscillation d'un ressort horizontal

1. Réf d'étude $\Re_G=\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z},t\right)$ supposé galiléen.

Système : Point M de masse m
Base de projection : cartésienne (celle du réf)
Bilan des forces : → Poids $\vec{P}=m\vec{g}=-mg\cdot\vec{e_z}$
→ Réaction Support : $\vec{R}=\vec{R_N}+\cancel{\vec{R_T}}=R_N\cdot\vec{e_z}$
→ Tension Ressort : $\vec{T}=-k\,(l-l_0)\cdot\vec{e_x}$

PFD dans R_G galiléen : $\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=m\cdot\overrightarrow{a(M/\Re)}$

D'où : $\begin{bmatrix}0\\-mg\end{bmatrix}_\Re+\begin{bmatrix}-k(l-l_0)\\0\end{bmatrix}_\Re+\begin{bmatrix}0\\R_N\end{bmatrix}_\Re=\begin{bmatrix}m\ddot{x}\\0\end{bmatrix}_\Re$

Et $\ddot{x}+\dfrac{k}{m}(l-l_0)\boxed{=\ddot{x}+\omega_0^2x=0}$ avec $\boxed{\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

2. On résout l'équation :
$$x(t)=A\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t),\qquad A,B\in\mathbb{R}$$
Et avec les CI : $\begin{cases}x(0)=x_0=A\\ \dot{x}(0)=0=B\omega_0\end{cases}$ $\boxed{\Rightarrow x(t)=x_0\cos(\omega_0t)}$

3. $\vec{T}=-kx\cdot\vec{e_x}=-kx_0\cos(\omega_0t)\cdot\vec{e_x}$ $\Rightarrow\begin{cases}T<0 & si\quad x>0\\ T>0 & si\quad x<0\end{cases}$

→ Il s'agit bien d'une force élastique : qui ramène le pt à sa position d'équilibre x = 0.

Exercice 7 : Oscillation d'un point relié à deux ressorts

1. Position d'équilibre : On peut le voir directement → Si x = 0, alors les ressorts n'appliquent pas de tension, le point est immobile dans le référentiel galiléen…
Ou on le démontre avec le PFS… un peu plus long…

2. Même méthode que dans l'exercice précédent :

Réf d'étude $\Re_G=\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z},t\right)$ supposé galiléen.

Système : Point M de masse m
Base de projection : cartésienne (celle du réf)
Bilan des forces : → Poids $\vec{P}=m\vec{g}=-mg\cdot\vec{e_z}$
→ Réaction Support : $\vec{R}=\vec{R_N}+\cancel{\vec{R_T}}=R_N\cdot\vec{e_z}$
→ Tensions Ressorts : $\begin{cases}\vec{T_1}=+k_1\,(l_1-l_{01})\cdot\vec{e_x}\\ \vec{T_2}=-k_2\,(l_2-l_{02})\cdot\vec{e_x}\end{cases}$

Mais $\begin{cases}l_1-l_{01}=-x & \Rightarrow\vec{T_1}=-k_1x\cdot\vec{e_x}\\ l_2-l_{02}=x & \Rightarrow\vec{T_2}=-k_2x\cdot\vec{e_x}\end{cases}$

PFD dans R_G galiléen : $\vec{P}+\vec{T_1}+\vec{T_2}+\vec{R}=m\cdot\overrightarrow{a(M/\Re)}$

D'où : $\begin{bmatrix}0\\-mg\end{bmatrix}_\Re+\begin{bmatrix}-(k_1+k_2)x\\0\end{bmatrix}_\Re+\begin{bmatrix}0\\R_N\end{bmatrix}_\Re=\begin{bmatrix}m\ddot{x}\\0\end{bmatrix}_\Re$

Et $\ddot{x}+\dfrac{(k_1+k_2)}{m}x\boxed{=\ddot{x}+\omega_0^2x=0,}$ avec $\boxed{\omega_0=\sqrt{\dfrac{(k_1+k_2)}{m}}}$

3. Même résolution pour l'équation, mais avec le ω_0 différent :
$$x(t)=A\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t),\qquad A,B\in\mathbb{R}$$
Et avec les CI : $\begin{cases}x(0)=x_0=A\\ \dot{x}(0)=0=B\omega_0\end{cases}$ $\boxed{\Rightarrow x(t)=x_0\cos(\omega_0t)}$

Exercice 8 : Etude d'une corde d'escalade

1. Méthode complète :
   - Référentiel d'étude : $\Re=\left(O,\vec{e_x},\vec{e_z},t\right)$
   - Système étudié : le grimpeur
   - Base de projection : on reste en cartésienne
   - Bilan des Forces : $\vec{P}=m\vec{g_0}=+mg_0\cdot\vec{e_z}$
   - PFD dans R galiléen : $m\vec{a}=\begin{bmatrix}m\ddot{x}\\m\ddot{z}\end{bmatrix}_\Re=m\vec{g_0}=\begin{bmatrix}0\\mg_0\end{bmatrix}_\Re$

   Et on intègre : $\begin{cases}\dot{x}(t)=\cancel{\dot{x}(0)}+\int_0^t\ddot{x}(t)\cdot dt=0\\ \dot{z}(t)=\cancel{\dot{z}(0)}+\int_0^t\ddot{z}(t)\cdot dt=gt\end{cases}$

   Et encore $\begin{cases}x(t)=\cancel{x(0)}+\int_0^t\dot{x}(t)\cdot dt=0\\ z(t)=\cancel{z(0)}+\int_0^t\dot{z}(t)\cdot dt=\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$

   La corde commence à se tendre pour $z(t_L)=L=\dfrac{1}{2}gt^2$

   Donc pour $t_L=\sqrt{\dfrac{2L}{g}}$ et $\boxed{v_L=gt_L=\sqrt{2gL}=12.5m.s^{-1}}$

2. On veut que le grimpeur s'arrête à la limite d'élasticité de la corde. On calcule donc la vitesse avec la nouvelle accélération a_0 (action conjuguée de la pesanteur et de la corde de tension $\vec{T}=-T_0\cdot\vec{e_z}$. Pour $t>t_L$:
$$m\vec{a}=\begin{bmatrix}m\ddot{x}\\m\ddot{z}\end{bmatrix}_\Re=\begin{bmatrix}0\\ma_0\end{bmatrix}=\vec{T}+m\vec{g_0}=\begin{bmatrix}0\\mg_0-T_0\end{bmatrix}_\Re$$
Et $\begin{cases}\dot{z}(t)=\cancel{\dot{z}(t_L)}+\int_{t_L}^t\ddot{z}(t)\cdot dt=v_L+a_0(t-t_L)\\ z(t)=\cancel{z(t_L)}+\int_{t_L}^t\dot{z}(t)\cdot dt=L+v_L(t-t_L)+\dfrac{1}{2}a_0(t-t_L)^2\end{cases}$

SOLUTION des EXERCICES – ME2 – Feuille 2/2

En t_B : $\begin{cases} z(t_B) = L(1+E) = L + v_L(t_B - t_L) + \frac{1}{2}a_0(t_B - t_L)^2 \\ \dot{z}(t_B) = 0 = v_L + a_0(t_B - t_L) \end{cases}$

Cela donne : $\begin{cases} LE = \frac{1}{2}v_L(t_B - t_L) \\ \boxed{a_0 = -\frac{v_L^2}{2LE} = -122.6\ m.s^{-2}} \end{cases}$

3. On a $\boxed{T_0 = mg_0 - ma_0 = m(g_0 - a_0) \approx 10,99kN}$.
La corde va résister et arrêter la chute du grimpeur. On aurait d'ailleurs pu se satisfaire ici d'une corde un peu plus fine… 1,1 tonnes de résistance aurait suffit, mais il vaut toujours mieux avoir un peu de marge dans ces cas-là !!!

Exercice 9 : Le lob au tennis

1. La méthode est rigoureusement la même que pour l'exercice de ballistique. On a avec le PFD en réf galiléen :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = v_0\cos\alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0\sin\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha + z_0 \end{cases}$$

2. Trajectoire : on élimine le temps :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\cdot\tan\alpha + z_0$$

3. Au niveau du fil, x = d_1 = 2m → z = 3m > 1m, la balle passe.
4. On trouve la distance x_1 entre le joueur 1 et le joueur 2 en imposant h dans l'équation de la trajectoire : 2 solutions :
→ x_1' = 1,4m ne convient pas, car dans le terrain du joueur 1
→ x_1'' = 7,5m convient, le joueur 2 doit donc se placer à 5,5m du filet
5. Si d2 = 4m, il est trop près du filet, le lob réussi si la balle atterri dans le court, donc si pour z = 0, x < 14m. On vérifie que cela fonctionne : x(z=0) = 7m
6. A l'impact : $\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha = 5m.s^{-1} \\ v_z = -\frac{gx}{v_0\cos\alpha} + v_0\sin\alpha = -9m.s^{-1} \end{cases}$

Norme de la vitesse : $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = 10,3m.s^{-1}$

Angle avec le sol : $\tan\beta = \frac{|v_z|}{v_x} = 1,8 \quad \Rightarrow \beta = 61°$

Exercice 10 : Saut à ski

Bien penser à faire l'inventaire des forces pour chacune des phases, et un PFD dans le référentiel terrestre qui peut être supposé galiléen…

Solutions :

1. Tension de la perche $T = \frac{F_1 + mg\sin\alpha}{\cos\beta} = 486N$
2. Distance parcourue $x - x_0 = 9,8m$
3. Vitesse limite $v_{\lim} = \sqrt{\frac{P\sin\alpha'}{k}} = 28,3m.s^{-1}$
4. Même problème que la balistique : on injecte y = -5m dans l'équation de la trajectoire : équation du second degré à résoudre, qui nous donne x_1 = 46,3m.

Exercice 11 : Plan incliné

Idem plan incliné mais avec une condition initiale différente : PFD sur l'objet en réf galiléen…

D'où : $\begin{bmatrix} 0 \\ -mg\sin\beta \\ -mg\cos\beta \end{bmatrix}_{\Re} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_N \end{bmatrix}_{\Re} = \begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ 0 \end{bmatrix}_{\Re}$

Ainsi : $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g\sin\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0\cos\alpha \\ \dot{y}(t) = v_0\sin\alpha - gt\sin\beta \end{cases}$

Et $\boxed{\begin{cases} x(t) = \cancel{x(0)} + v_0 t\cos\alpha \\ y(t) = \cancel{y(t)} + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\sin\beta \end{cases}}$

Trajectoire : $\begin{cases} t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \\ y = x\cdot\tan\alpha - \frac{gx^2\sin\beta}{2v_0^2\cos^2\alpha} \end{cases}$ → Parabole

Cas limites β = 0 : mouvement horizontal → rectiligne uniforme
Et β = π/2 : mouvement vertical → balistique

Exercice 12 : Anneau sur un guide circulaire

Référentiel d'étude terrestre : $\Re = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, t\right)$

Base de projection : Polaire $B_{POL} = \left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}\right)$

Toute réaction d'un support (surface ou ligne) se décompose en une composante normale à la surface ou à la ligne, modélisant le fait que l'objet ne peut pas pénétrer dans le support, et une composante tangentielle, modélisant les frottements (négligés ici) : donc $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} = \overrightarrow{R_N} = \begin{bmatrix} R_r \\ 0 \\ R_z \end{bmatrix}_{POL}$

Bilan des forces : → Poids : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\cdot\overrightarrow{e_z}$
→ Réaction $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N}$

PFD sur M dans R supposé galiléen : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R_N} = m\cdot\overrightarrow{a(M/\Re)}$.

→ On sait déjà que le point ne peut pas quitter le guide, donc r est constante et z aussi
→ On sait aussi en coordonnées polaires, dans notre cas, que : $\overrightarrow{v(M/\Re)} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{POL} = r\dot{\theta}\cdot\overrightarrow{e_\theta}$

Donc $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}_{POL} + \begin{bmatrix} R_r \\ 0 \\ R_z \end{bmatrix}_{POL} = m\begin{bmatrix} \cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2 \\ \cancel{2\dot{r}\dot{\theta}} + r\ddot{\theta} \\ \cancel{\ddot{z}} \end{bmatrix}_{POL} = \begin{bmatrix} -\frac{mv^2}{b} \\ m\frac{dv}{dt} \\ 0 \end{bmatrix}_{POL}$

Cela nous donne : $\begin{cases} v = cstte = v_0 \\ R_z = mg \\ R_r = -\frac{mv^2}{b} \end{cases} \quad \boxed{\overrightarrow{R} = mg\cdot\overrightarrow{e_z} - \frac{mv_0^2}{b}\cdot\overrightarrow{e_r}},$

Exercice 13 : Coulissement sur une tige en rotation

Référentiel d'étude terrestre : $\Re = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, t\right)$

1. Réf d'étude $\Re_G = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, t\right)$ supposé galiléen.

Système : Point M de masse m

Base de projection : cylindrique $B_{CYL} = \left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}\right)$

Bilan des forces : → Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \cdot \overrightarrow{e_z}$

→ Réaction Support : $\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \cancel{\overrightarrow{R_T}} = R_N \cdot \overrightarrow{e_z}$

2. PFD dans R_G galiléen : $\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \overrightarrow{a(M/\Re)}$

D'où : $$\boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}_{B_{CYL}} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_{N\theta} \\ R_{Nz} \end{bmatrix}_{B_{CYL}} = m\begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}_{B_{CYL}} = m\begin{bmatrix} \ddot{r} - r\omega^2 \\ 2\dot{r}\omega \\ 0 \end{bmatrix}_{B_{CYL}}}$$

3. Equations : $\begin{cases} \boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0} \\ 2m\dot{r}\omega = R_{N\theta} \end{cases}$, mais on ne peut rien faire avec la seconde, car on ne connaît pas $R_{N\theta}$.

4. On en déduit l'expression de r(t) : (cas peu fréquent d'éq diff)

$$r(t) = A\cosh(\omega t) + B\sinh(\omega t), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Avec les cosinus et sinus hyperboliques, définis par

$$\cosh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \quad et \quad \sinh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$$

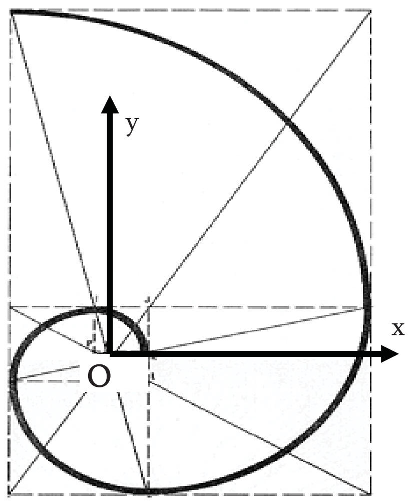
Et avec les CI : $\begin{cases} r(0) = r_0 = A \\ \dot{r}(0) = 0 = B\omega \end{cases}$ $\boxed{\Rightarrow r(t) = r_0 \cosh(\omega t)}$

→ On trouve une solution divergente, qui ressemble à une spirale logarithmique, avec $\boxed{\begin{cases} r(t) = r_0 \cosh(\omega t) \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}}$

5. Réaction de la tige : $\boxed{\begin{cases} R_{N\theta} = 2m\dot{r}\omega = 2mr_0\omega^2 \sinh(\omega t) \\ R_{Nz} = mg \end{cases}}$

→ Plus le point s'éloigne et plus la tige doit fournir d'effort pour maintenir la rotation.

Allure de la courbe :



6. On rajoute un ressort dans le PFD :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}_{B_{CYL}} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_{N\theta} \\ R_{Nz} \end{bmatrix}_{B_{CYL}} - k\begin{bmatrix} r - r_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_{CYL}} = m\begin{bmatrix} \ddot{r} - r\omega^2 \\ 2\dot{r}\omega \\ 0 \end{bmatrix}_{B_{CYL}}$$

Ce qui nous donne la nouvelle équation différentielle :

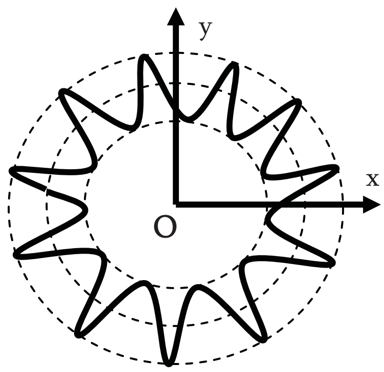
$$\ddot{r} - \omega^2 r + \frac{k}{m}(r - r_0) = 0$$

Ou encore $$\boxed{\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) r = \frac{k}{m} r_0}$$

Résolution : on voit 2 cas apparaître

__Cas 1 :__ si $\frac{k}{m} > \omega^2$, alors le ressort ramène le point autour de la position en r = r_0. On a des ondulations autour de cette position :

$$r(t) = \frac{k}{k - m\omega^2} r_0 + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \ A, B \in \mathbb{R} \cdots$$



__Cas 2 :__ si $\frac{k}{m} < \omega^2$, alors le ressort ne suffit pas à ramener le point autour d'une quelconque position d'équilibre, la solution reste en cosinus hyperbolique, et elle diverge de la même manière.