# Supplément EXERCICES – TH1 / TH2 – Bases de la Thermo – Statique – Feuille 1/3

## Bases de la Thermo : Gaz Parfaits

### Exercice 1 : Pression d'un pneu

Une chambre à air d'un pneu d'automobile est gonflée à la pression $P_1$ = 2,0bar, l'air étant à la température $t_1$ = 27°C. L'air est assimilé à un gaz parfait et on suppose que le volume intérieur à la chambre à air reste à peu près constant.

1. L'automobiliste ayant roulé sur autoroute, la température dans la chambre à air atteint la valeur $t_2$ = 57°C. Exprimer puis calculer la pression $P_2$ de l'air dans le pneu.
2. A ce moment, le conducteur vérifie la pression des pneus et, la trouvant excessive, la ramène à $P_1$ = 2,0bar, sans que l'air ait eu le temps de refroidir. Quelle sera la pression $P_1$' des pneus quand la température sera revenue à $t_1$ = 27°C ?
3. Si la pression maximale admissible dans le pneu est $P_{max}$ = 6,0bar, à quelle température $t_{max}$ risque-t-il d'exploser ?

### Exercice 2 : Dissociation du Brome à haute T

Le brome $Br_2$ est à température ambiante un gaz, supposé parfait. Données : M(Br) = 80 g.mol$^{-1}$, R = 8,314 J.K$^{-1}$.mol$^{-1}$.

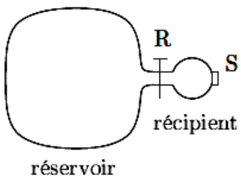
1. Calculer en litre le volume $V_0$ théoriquement occupé par une masse m = 1g de brome à la température $t_0$ = 1600°C et sous la pression atmosphérique $P_0$ = 1atm.

La mesure expérimentale de ce volume est $V_0$' = 1,195L. La différence entre la mesure expérimentale et la valeur théorique est due à la dissociation d'une partie des molécules de brome, suivant l'équation bilan $Br_2 \rightarrow 2Br$.

2. Expliquer pourquoi cette dissociation permet d'expliquer qualitativement la différence entre la mesure expérimentale et la valeur théorique.
3. Déterminer l'expression puis la valeur du coefficient de dissociation α, défini comme le rapport entre la quantité de brome dissocié et la quantité initiale de brome.

### Exercice 3 : Vidange d'un réservoir d'air comprimé

Un réservoir de volume V = 100L contient de l'air comprimé sous la pression $P_0$ = 10bar et à la température ambiante $t_0$ = 20°C. Ce réservoir est fermé par un robinet R. Sur l'embout de ce robinet, on fixe un récipient de volume v = 10L contenant de l'air ambiant, à la température $t_0$ et à la pression p = 1bar. Ce récipient est muni d'un soupape S initialement fermée.




1. On ouvre le robinet. Que se passe-t-il ? Exprimer puis calculer la pression $P_1$ obtenue dans le réservoir.
2. Le robinet est ensuite refermé, puis la soupape ouverte et enfin on referme la soupape. On ouvre à nouveau le robinet. Exprimer puis calculer la pression $P_2$ obtenue dans le réservoir.
3. La suite des manipulations précédentes est à nouveau effectuée. Exprimer la relation entre les pressions $P_{n+1}$ et $P_n$. En déduire la pression limite $P_\infty$ atteinte dans le réservoir.

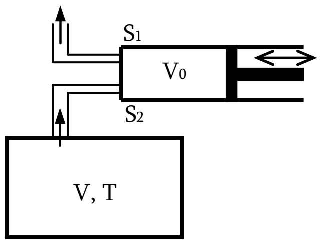
### Exercice 4 : Ouverture d'une bouteille d'air comprimé

L'air est assimilé à un gaz parfait. Une bouteille d'acier, munie d'un détendeur, contient un volume $V_1$ = 60L d'air comprimé sous $P_1$ = 15bar et $T_1$ = 298K.
On donne R = 3,814 J.K$^{-1}$.mol$^{-1}$, et $M_{air}$ = 29 g.mol$^{-1}$.

1. Calculer la quantité d'air contenue dans cette bouteille, molaire et massique.
2. Quelle est la masse volumique de l'air comprimé dans ces conditions ? Sa densité ?
3. Sachant que l'air peut être assimilé au mélange (en mol) 21% $O_2$ (M(O) = 16g.mol$^{-1}$), 78% $N_2$ (M(N) = 14g.mol$^{-1}$), et 1% de gaz nobles (Ar), calculer la masse de dioxygène contenue dans cette bouteille.
4. On ouvre le détendeur à l'air atmosphérique ($P_2$ = 1bar, $T_2$ = 298K). Quel volume d'air comprimé s'échappe de la bouteille à température constante ?

### Exercice 5 : Pompe à vide

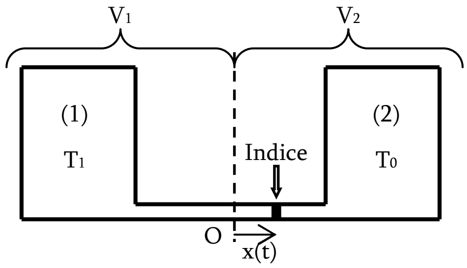
Pour faire le vide dans une enceinte, contenant de l'air et de volume V, on utilise une pompe à vide. Elle est composée d'un cylindre à l'intérieur duquel se déplace, sans frottement, un piston. Le volume maximum d'air admissible dans le corps de pompe est $V_0$, lorsque le piston est tiré complètement vers la droite. Lorsqu'il est poussé complètement à gauche, le piston peut atteindre le fond du cylindre. Deux soupapes, $S_1$ et $S_2$ permettent l'admission de l'air venant de l'enceinte et son refoulement vers l'atmosphère extérieure dont la pression est $P_0$. Un moteur électrique déplace le piston qui fait un aller et un retour quand le moteur a fait un tour. On assimilera l'air à un gaz parfait dont la température T reste constante lors du fonctionnement de la pompe. Au départ, la pression dans l'enceinte est $P_0$ = 1bar. On néglige le volume du tuyau reliant la pompe à l'enceinte.




1. On étudie le premier aller-retour du piston. Au départ, la pression dans l'enceinte est $P_0$, le piston est poussé vers la gauche. Puis, $S_2$ étant ouverte et $S_1$ fermée, il est tiré complètement vers la droite. Lors du retour du piston, $S_1$ est ouverte et $S_2$ fermée, l'air contenu dans le cylindre est refoulé vers l'extérieur. Déterminer la pression $P_1$ à la fin de cette opération.
2. En reprenant le raisonnement précédent, déterminer la pression $P_2$, dans l'enceinte, après le deuxième aller-retour.
3. En déduire la pression $P_N$ à l'intérieur de l'enceinte au bout de N aller-retours.
4. La fréquence de rotation du moteur est de 300 tours.min$^{-1}$. Déterminer le temps t pour obtenir une pression de 0,001 bar. On donne V = 10,0L et $V_0$ = 50,0cm$^3$.

## Exercice 6 : Thermomètre différentiel

Deux réservoirs, notés respectivement (1) et (2) sont séparés par un tube horizontal de faible section S comportant un index de mercure de dimension négligeable, supposé incompressible, et susceptible de se déplacer. Les deux compartiments contiennent $n_0$ moles d'un gaz parfait. A l'instant initial, t = 0, les enceintes sont de même volume $V_0$, les gaz à la température $T_0$ et l'index au centre O du tube. Le gaz (1) est porté et maintenu à la température $T_1$ ($T_1 > T_0$) alors que le gaz (2) est maintenu constant à la température $T_0$. L'index de mercure est ainsi déplacé d'une longueur x.

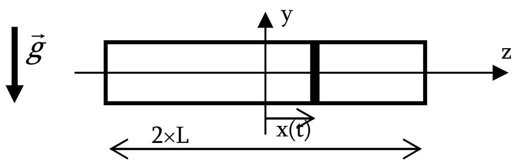



1. Montrer qu'un tel dispositif peut faire office de thermomètre différentiel en établissant la relation : $T_1 - T_0 = a.x$, et exprimer a en fonction de S, $V_0$ et $T_0$.
2. A quel différentiel de température correspond un déplacement de 5cm.

Données : $T_0$ = 293K, S = 20mm², $V_0$ = 586mL.

## Exercice 7 : Oscillations d'un piston

Un tube cylindrique horizontal de section S et de longueur 2×L, est séparé en deux compartiments par un piston de masse m, mobile sans frottement dans le tube. L'épaisseur de ce piston est négligeable par rapport à la longueur du tube. Chaque compartiment ainsi délimité contient la même quantité d'un gaz parfait, à la température $T_0$ et sous pression initiale $P_0$. La position du piston dans le tube est repérée par son abscisse x(t) mesurée par rapport au milieu du tube. Lorsque le système est à l'équilibre, le piston est donc en x = 0.




A la date t = 0, on écarte le piston d'une distante x(0) = d et on le lâche sans vitesse initiale. Le piston est assimilé à un point matériel. Le tube est fixe dans un référentiel d'étude supposé galiléen. De plus, on fait l'hypothèse que le gaz est maintenu à une température $T_0$ constante dans le temps.

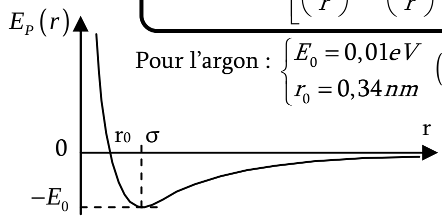
1. Faire le bilan des forces exercées sur le piston.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par x(t).
3. On considère le cas de petits déplacements du piston : x(t) << L. Quelle est alors la nature du mouvement du piston ? Déterminer l'expression de la pulsation $\omega_0$ des oscillations du piston.

# Fluides Réels et Coefficients Thermoélastiques

## Exercice 8 : Gaz de Van Der Waals

Lorsque la densité moléculaire augmente et que la distance intermoléculaire diminue, il est impossible de négliger les interactions entre les molécules : le modèle du gaz parfait est inadapté.

Pour expliquer les propriétés des fluides réels, il est donc essentiel de tenir compte des forces intermoléculaires : le physicien hollandais J. Van Der Waals, prix Nobel de Physique en 1910, a établi en 1873 leur origine électromagnétique. Ces forces dérivent d'une énergie potentielle bien représentée, en particulier dans le cas des gaz rares, par le potentiel de Lennard-Jones : $\boxed{E_P(r) = 4E_0\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right]}$




Pour l'argon : $\begin{cases} E_0 = 0{,}01eV \\ r_0 = 0{,}34nm \end{cases}$ $(1eV = 1{,}6.10^{-19}J)$

1. Interpréter l'allure de la fonction $E_P(r)$ en distinguant les termes de cette énergie potentielle. Dégager la signification physique des termes correctifs de l'équation d'état d'un gaz réel de Van Der Waals par rapport au modèle du gaz parfait : $\boxed{\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT}$
2. La portée de l'interaction ne dépasse pas le nanomètre. Jusqu'à quelle pression est-il légitime de considérer le comportement de l'argon comme celui d'un gaz parfait à 293K ? (On donne $k_B = 1{,}38.10^{-23}J.K^{-1}$)

## Exercice 9 : Gaz parfait et gaz réel de Dieterici

Une mole d'hélium occupe un volume V = 2,00L à T = 1000K.

1. Dans un premier temps, on suppose le gaz parfait. Quelle est la pression de l'hélium ? (on rappelle que R = 3,814 $u_{SI}$).

On suppose maintenant que l'hélium vérifie l'équation d'état du modèle de Dieterici : $\boxed{P(V_m - b) = RT\exp\left(-\frac{a}{RTV}\right)}$

(Avec $a = 3{,}4.10^{-3}\,J.m^3.mol^{-1}$ et $b = 2{,}3.10^{-5}\,m^3$)

2. Pour des basses pressions, on peut utiliser la simplification : $P(V_m - b) = RT\left(1 - \frac{A}{V_m}\right)$
   2.a) Retrouver l'équation d'état du gaz parfait si $V \rightarrow +\infty$
   2.b) Déterminer A par un développement limité DL au premier ordre en 1/V. (DL : pour x << 1, $e^x \approx 1 + x$)
   2.c) Déterminer le sens physique de a et de b
3. Calculer dans ce nouveau modèle la pression de l'hélium
4. Exprimer l'écart relatif $\frac{(PV_m) - (PV_m)_{GP}}{(PV_m)_{GP}}$ et le calculer ici.

# Supplément EXERCICES – TH1 / TH2 – Bases de la Thermo – Statique – Feuille 2/3

## Exercice 10 : Coefs thermoélastiques d'un gaz réel

Pour de faibles pressions, une mole d'un gaz obéit à l'équation d'état simplifiée : $PV = RT + bP$, où R est la constante des gaz parfaits et b une constante positive (le covolume).

1. que représente ce coefficient b ?
2. Exprimer les coefficients de dilatation isobare $\alpha$ et de compressibilité isotherme $\chi_T$ de ce gaz.

## Exercice 11 : Dilatation du mercure

Le mercure est, dans les conditions standards de température et de pression, un liquide de coefficient de dilatation isobare $\alpha = 0{,}182.10^{-3}\ K^{-1}$. On chauffe un volume $V_0 = 1L$ de mercure, de la température $T_0 = 20°C$ à la température $T_1 = 80°C$, de manière isobare. Le coefficient $\alpha$ est supposé constant dans ce domaine.

1. En supposant que le volume reste quasiment identique, estimer la variation de volume $\delta V$ subie par le mercure. Quel est son volume final $V_1$ ?
2. En utilisant la définition du coefficient $\alpha$, établir la relation générale donnant le volume V en fonction de la température T, de $T_0$ et de $V_0$ (P constante). En déduire le volume final $V_1$' dans ce cas.
3. En déduire pourquoi, dans un thermomètre, on a besoin d'un petit réservoir de mercure pour alimenter la colonne (qui est très fine).

## Exercice 12 : Compression du mercure

Le mercure est, dans les conditions standards de température et de pression, un liquide de coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = 38.10^{-12}\ Pa^{-1}$. On comprime un volume $V_0 = 1L$ de mercure, de la pression $P_0 = 1bar$ à la pression $P_1 = 1000bar$, de manière isotherme. Le coefficient $\chi_T$ est supposé constant dans ce domaine.

1. En supposant que le volume reste quasiment identique, estimer la variation de volume $\delta V$ subie par le mercure. Quel est son volume final $V_1$ ?
2. En utilisant la définition du coefficient $\chi_T$, établir la relation générale donnant le volume V en fonction de la pression P, de $P_0$ et de $V_0$. En déduire le volume final $V_1$' dans ce cas.

## Exercice 13 : Compression d'un volume d'eau

A des pressions inférieures à 20 bar et des températures entre 273K et 283K, le volume massique de l'eau liquide est donné par l'équation d'état : $v = v_0\left[1 + a\left(T - T_0\right)^2 - \left(k - bT\right)\left(P - P_0\right)\right]$, où $v_0 = 1 cm^3.g^{-1}$, $T_0 = 277K$, et $P_0 = 1\ bar$.

1. Quelles sont les unités dans le SI de a, b et k ?

Dans ce système : $a = 8{,}25.10^{-6}$, $b = 7{,}0.10^{-13}$, $k = 6{,}94.10^{-10}$.

2. Montrer qu'à P constante, v passe par un minimum pour une valeur $T_m$ de la température. Calculer $T_m$ pour $P = P_0$.
3. Définir et calculer les coefficients thermoélastiques de l'eau à P = 1bar et T = 283K
4. On prend désormais pour l'eau au voisinage de 277K et 1bar un modèle incompressible et indilatable. Quelle est la nouvelle équation d'état ?

## Exercice 14 : Thermomètre à alcool

Un thermomètre à alcool est porté à une température maximale telle que son réservoir et sa colonne verticale sont complètement remplis de liquide d'équation d'état V = f(P,T). On donne les coefficients thermoélastiques supposés constants : $\alpha = 11{,}2.10^{-3} K^{-1}$ et $\chi_T = 3{,}4.10^{-5} bar^{-1}$.

1. Montrer qu'une simple augmentation de température de 0,5°C suffit à créer une surpression considérable. Que se passe-t-il ?
2. Etablir l'équation d'état de ce liquide. On pose $V = V_0$ pour $P = P_0$ et $T = T_0$.
3. Calculer l'écart relatif de volume $\dfrac{\left|V - V_0\right|}{V_0}$ pour une variation de 10K à pression fixée, ou pour une variation de 10bar à température fixée.
4. Conclure sur le modèle usuel choisi pour les états condensés.

## Exercice 15 : Thermomètre à gaz

On utilise du dihydrogène sous pression fixée (faible de manière à pouvoir l'assimiler à un gaz parfait). On étudie la variation de son volume avec la température t (en °C) dans un thermomètre entre 0°C et 30°C.

On trouve une loi expérimentale du type :

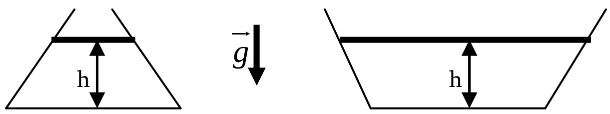
$$\boxed{V = V_0\left(1 + \overline{\alpha} \cdot t\right) \quad \text{avec} \quad \overline{\alpha} = \frac{1}{273{,}15}\ °C^{-1}}$$

1. Peut-on assimiler le $\overline{\alpha}$ au coefficient de dilatation isobare d'un gaz parfait ?
2. Retrouver pour $H_2$ la proportionnalité du volume V avec la température T(K). Quel est le coefficient de dilatation isobare de ce gaz ?
3. De combien de pourcent varie le volume du gaz entre 0°C et 30°C. Que dire de la précision du thermomètre ?

# Statique des Fluides – Fluide Incompressible

## Exercice 16 : Influence de la forme

Pour une même hauteur d'eau et à surface de fond identique, comparer les forces de pression exercées sur les fonds des récipients A et B.



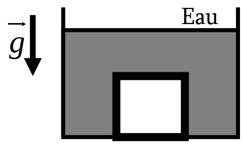

## Exercice 17 : Remontée d'un cube

Un cube de masse volumique $\rho_{cube}$ est posé au fond de l'eau de masse volumique $\rho_{eau}$. Pour qu'il puisse remonter à la surface sous l'action de la poussée d'Archimède :

→ Il faut que $\rho_{cube} < \rho_{air}$.

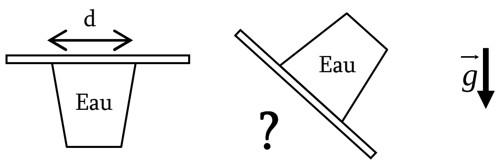
→ Il faut que $\rho_{cube} > \rho_{air}$.

→ Il ne peut pas remonter à la surface.




## Exercice 18 : Equilibre de la feuille ?

Un verre de diamètre supérieur d = 10cm et de volume V = 0,25L est rempli d'eau à ras bord. Une feuille de papier débordant largement est posée sur le verre. Vous appliquez votre main sur l'ensemble et retournez le tout. Lorsque vous enlevez votre main, que se passe-t-il ?

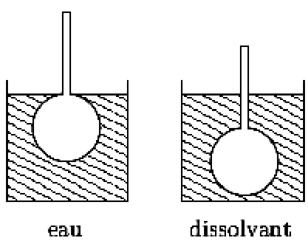



## Exercice 19 : Densimètre

Un densimètre, servant à mesurer la densité d'un liquide par rapport à l'eau, est constitué d'un ballon sphérique de rayon R = 12mm, lesté et surmonté d'un tube cylindrique de rayon r = 2mm portant des graduations régulièrement espacées d'une distance l. La masse totale du densimètre est notée M. Plongé dans l'eau pure de masse volumique $\rho_0$, le densimètre affleure à l'équilibre la graduation n = 0 située à la base du tube. Plongé dans du dissolvant de masse volumique $\rho_1$, il affleure la graduation $n_1$ = 80. On note V le volume du ballon sphérique et v le volume du tube délimité par deux graduations consécutives.

Données : $\rho_0 = 1$ g.cm$^{-3}$, $\rho_1 = 0,72$ g.cm$^{-3}$

1. En traduisant l'équilibre du densimètre, déterminer la relation entre $\rho_0$, $\rho_1$, V, v et $n_1$.
2. En déduire la valeur numérique de v. En déduire la distance l.




3. Le densimètre est maintenant plongé dans du benzène. Il affleure à la graduation $n_2$ = 28. En déduire d du benzène par rapport à de l'eau.

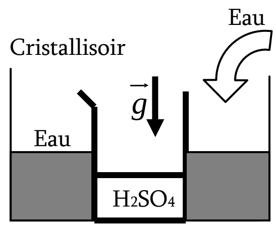
## Exercice 20 : Débordera ? Débordera pas ?

Un verre contenant un glaçon, de volume V et de masse volumique μ est rempli à ras bord d'eau liquide de masse volumique $\mu_0$.

1. Exprimer en fonction des données le volume $v_{im}$ du glaçon immergé dans l'eau ainsi que le volume v du glaçon lorsqu'il aura fondu.
2. Faire l'application numérique du pourcentage immergé pour $\mu_0$ = 1g.cm$^{-3}$ et μ = 0,92g.cm$^{-3}$
3. Faut-il prévoir une éponge pour essuyer la table ? Que se passe-t-il si à la place de l'eau il y a du whisky ? (densité de l'alcool inférieur à celle de l'eau)

## Exercice 21 : Equilibre d'un bécher

Le champ de pesanteur est uniforme et d'intensité g. Le milieu extérieur est l'atmosphère, de pression et de température constantes $P_0$ et $T_0$.




Un bécher cylindrique a les caractéristiques suivantes :

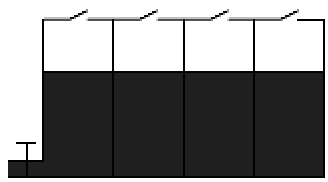
→ Surface de base de rayon R = 3,5cm,
→ Hauteur H = 9cm
→ Masse à vide m = 98g.

Il contient un volume $V_A$=100mL d'acide sulfurique concentré $H_2SO_4$ de densité d=1,84. Il est placé dans un cristallisoir dans lequel on verse progressivement de l'eau.

→ En faisant l'hypothèse qu'il existe toujours entre le fond du cristallisoir et la base du bécher une fine pellicule d'eau, à partir de quelle hauteur critique $h_C$ d'eau versée le bécher risque-t-il de se mettre à flotter et de se renverser ?

## Exercice 22 : Remplissage d'une citerne

Une citerne, destinée au transport d'un liquide de masse volumique ρ = 2.10$^3$ kg.m$^{-3}$, est divisée en compartiments identiques communiquant entre eux par la partie inférieure (ceci afin de imiter le mouvement du liquide lors du transport). Le remplissage et la vidange s'effectuent par le bas. Les clapets situés à la partie supérieure de chaque compartiment sont ouverts pendant le remplissage et la vidange, et fermés pendant le transport.



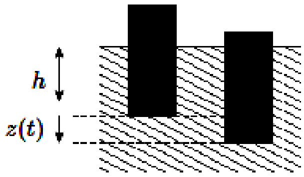
1. Le remplissage est effectué sous la pression atmosphérique $P_0$ = 1,0 bar et à une température $t_0$ = 20°C. Au cours du transport, la température s'élève à $t_1$ = 70°C. Exprimer et calculer la pression $P_1$ atteinte par l'air qui surmonte le liquide contenu dans la citerne.

2. Au cours du remplissage, l'un des clapets a été fermé prématurément et il existe une dénivellation d = 2m entre le niveau du liquide dans le compartiment correspondant et le niveau général de la cuve. Exprimer puis calculer la pression $P_2$ dans le compartiment où s'est produit l'incident.

# Supplément EXERCICES – TH1 / TH2 – Bases de la Thermo – Statique – Feuille 3/3

## Exercice 23 : Oscillations d'un bouchon lesté

Un bouchon homogène, de masse volumique $\mu$, de forme cylindrique de hauteur H et de section S, est lesté par une pastille de masse m fixée sur sa base inférieure. A l'équilibre dans l'eau de masse volumique $\mu_0$, la hauteur du bouchon enfoncé dans l'eau est h.

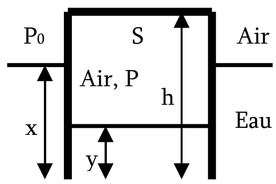



1. Déterminer la relation liant h et les données de l'énoncé.
2. On enfonce le bouchon dans l'eau et on le lâche. Il se met à osciller. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la côte z(t) mesurant le déplacement vers le bas du bouchon par rapport à l'équilibre.
3. Identifier la période T des oscillations en fonction des données.

## Exercice 24 : Cloche renversée

On renverse une cloche cylindrique de section s, de hauteur h et de masse m, et on la laisse descendre verticalement dans une cuve d'eau. La cloche s'enfonce dans l'eau en emprisonnant l'air qu'elle contenait et occupant initialement son volume intérieur. A l'équilibre, la cloche flotte, la pression atmosphérique vaut $P_0$ et la masse volumique de l'eau est $\rho$. L'épaisseur des parois de la cloche est supposée négligeable.

1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la cloche, et éliminer celles qui s'annulent deux à deux. En déduire une condition d'équilibre pour la cloche.
2. Déterminer les hauteurs x et y repérant les surfaces libres de l'eau par rapport aux bords de la cloche.
3. A quelle condition sur le volume $V_0 = hS$ de la cloche celle-ci peut-elle flotter ?
4. Qu'y a-t-il de changé si on tient compte de l'épaisseur des parois ?




## Exercice 25 : Fluide en rotation uniforme

Une cuve cylindrique de rayon R contient une hauteur h d'eau, fluide incompressible et homogène, de masse volumique $\rho$. Elle est mise en rotation à une vitesse angulaire $\omega$ constante autour de son axe de symétrie Oz et, au bout de quelques instants, un état d'équilibre relatif est atteint dans le référentiel tournant (R') de la cuve. Le PFS appliqué en coordonnées cylindriques (r,$\theta$,z) lié au référentiel R' donne l'équation pour la force volumique :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_{\theta,z}\overrightarrow{e_r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)_{r,z}\overrightarrow{e_\theta}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{r,\theta}\overrightarrow{e_z}=\overrightarrow{f_V}$$

1. Expliquer pourquoi le fluide tourne avec la cuve et est immobile dans R' à l'équilibre ?
2. Quelles sont les forces volumiques exercées sur la particule.
3. Résoudre les équations différentielles et trouver l'équation de la surface libre.

# Statique des Fluides – Fluide Compressible

## Exercice 26 : Modèle idéal de l'atmosphère isotherme

1. En supposant l'atmosphère isotherme (sur quelques centaines de mètres), redémontrer l'évolution de la pression en fonction de z.
2. Calculer la valeur de P pour z = 250m, z = 500m et z = 1000m, et tracer son évolution entre la surface et 1000m d'altitude. On donne $P_0$ = 1bar, $T_0$ = 293K (valeurs de T et P au sol), g = 9,8m.s$^{-2}$, $M_{air}$ = 29g.mol$^{-1}$, et R = 8,314 $u_{SI}$.

## Exercice 27 : Modèle plus réaliste pour la troposphère

Selon le modèle de l'Atmosphère Standard Internationale (ISA), on admet que dans la troposphère (entre 0 et 11km d'altitude), la température T varie avec l'altitude z selon une loi de la forme : $T = T_0 + A \cdot z$ , où $T_0$ est la température au sol et A une constante. L'air est assimilé à un GP (M = 29g.mol$^{-1}$).

Données : $\begin{cases} T_0 = 15°C \text{ , } P_0 = 101325\ Pa \text{ , } g = 9{,}80\ m.s^{-2} \text{ ,} \\ \dfrac{dT}{dz} = -6{,}5\ K.km^{-1} \quad \text{et} \quad R = 8{,}314\ u_{SI} \end{cases}$

1. Etablir la loi de variation de P(z)
2. AN : Calculer $T_1$ et $P_1$ à 11km d'altitude

## Exercice 28 : Double vitrage

Un double vitrage est constitué de deux vitres séparées par de l'air emprisonné à la pression atmosphérique du lieu de fabrication, qui se trouve au niveau de la mer : $P_0$ = 1,013bar. Il ne peut pas résister à un écart relatif entre la pression intérieure et la pression extérieure supérieur à 10%.

→ En supposant que l'air atmosphérique suit la loi de l'équilibre de l'atmosphère isotherme, jusqu'à quelle altitude maximale $h_{max}$ peut-il être transporté sans risque ?

## Exercice 29 : Atmosphère de température variable

L'atmosphère terrestre est assimilée à un gaz parfait placé dans le champ de pesanteur uniforme et constant ($g_0$ = 9,81m.s$^{-2}$)

1. Soit dP la variation de pression lorsque l'on se déplace verticalement de dz à partir du point M(z). L'axe Oz est ascendant et l'origine est au niveau de la mer. Démontrer la relation $dP = -\rho(z) g_0 dz$
2. La température de l'air varie en fonction de l'altitude selon la loi $T(z) = \dfrac{Az_0}{z+z_0}$, où A et $z_0$ sont des constantes positives. Préciser leurs unités, et donner la signification physique de A.
3. La température baisse de 7,5K lorsque l'on s'élève de 1 km à partir du niveau de la mer où T = $T_0$ = 273K, et P = $P_0$ = $10^5$Pa. Calculer A et $z_0$.
4. Déterminer la pression à l'altitude z.
5. Application numérique sur l'Everest : z = 8847m, R = 8,314 $u_{SI}$, $M_{air}$ = 29g.mol$^{-1}$.

## Exercice 30 : Altitude plafond d'un ballon sonde

On considère le modèle de l'atmosphère isotherme à la température $t_0$ = 20°C, pour lequel la pression P à l'altitude z est donnée par la relation $P(z) = P_0 \exp(-z/H)$, où $P_0$ = 1,00bar est la pression au niveau du sol et H = 8,6km. Un ballon sonde est constitué d'une enveloppe en aluminium, de volume fixe V = 3L, de masse m = 2,00g, gonflée avec de l'hélium à la pression $P_{He}$ = 1bar. Données : $M_{air} = 29 g.mol^{-1}$ et $M_{He} = 4 g.mol^{-1}$

1. Calculer la masse d'hélium $m_{He}$ contenu dans le ballon.
2. Déterminer l'expression puis calculer la pression $P_1$ de l'air à l'altitude à laquelle le ballon-sonde va se stabiliser.
3. En déduire l'altitude plafond $z_1$ atteinte par le ballon-sonde.

# Statique des Fluides – Calcul Forces de Pression

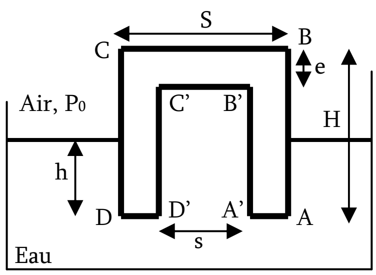
## Exercice 31 : Etude d'un corps flottant

Soit un verre ABCD de forme cylindrique, de masse m à vide, de hauteur intérieure H et de sections intérieure s et extérieure S. On remplit complètement ce verre avec de l'eau, puis on ferme avec la main la surface libre AD pour le retourner sur une cuve à eau en l'enfonçant d'une hauteur h.

Quelle est la force appliquée par l'opérateur pour le maintenir à l'équilibre ?

→ Faire le calcul par un bilan des forces pressantes

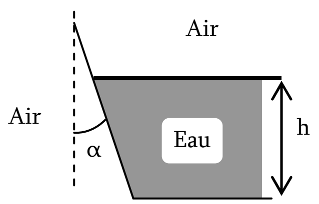
→ Faire le calcul avec le théorème d'Archimède




## Exercice 32 : Pression sur la paroi d'une piscine

La paroi d'une piscine (en kit, hors sol), est schématisée ci-contre. L'angle α vaut 30°. La hauteur d'eau est de h = 2m. La pression atmosphérique locale est $P_0$ = 1bar. On donne $\rho_{eau} = 1\ kg.L^{-1}$ et $g = 9{,}80\ m.s^{-2}$.

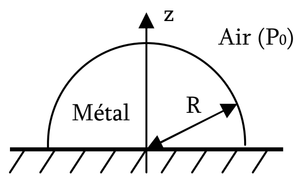
→ Calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur cette paroi, de longueur L = 5m.




## Exercice 33 : Pression sur une demi boule

### a) Calcul direct

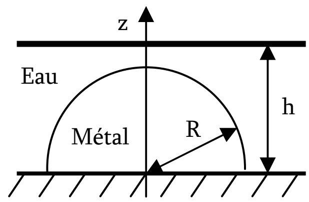
Soit une demi boule métallique de rayon R = 1m, posée sur un sol plat et baignant dans l'air.




→ Calculer la force pressante résultante de l'air atmosphérique sur cette demi-boule, après avoir précisé sa direction et son sens.

### b) Par le théorème d'Archimède

La même demi boule est maintenant immergée au fond d'une piscine, toujours sur un sol plat.

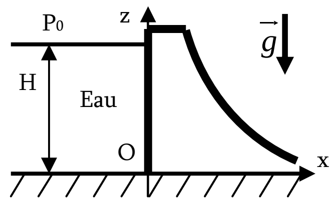



1. Peut-on utiliser un calcul direct pour obtenir la résultante des forces de pressions ? Et est-ce commode ?
2. Pourquoi, pour appliquer le théorème d'Archimède, faut-il supposer qu'il existe un filet d'eau entre la demi-boule et le fond ?
3. Quelle est la poussée d'Archimède exercée sur la demi-boule ? En déduire la force pressante résultante sur la paroi demi-sphérique.

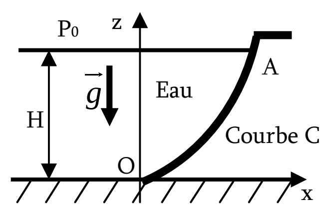
## Exercice 34 : Force sur un barrage

Un barrage droit permet de réaliser une retenue d'eau sur une profondeur H et une largeur L. La pression de l'air est $P_0$, et la masse volumique de l'eau est constante et vaut $\rho_0$.

1. Exprimer la loi donnant la pression P qui règne dans l'eau selon la hauteur z.
2. Déterminer la résultante $\overrightarrow{F_{eau}}$ des efforts de pression qu'exerce l'eau sur le barrage en fonction de ρ, g, L et H et $P_0$.




3. Déterminer le centre de poussée C
4. Le profil du barrage est modifié. Il correspond à une courbe C d'équation z = f(x). La hauteur d'eau demeure H et la largeur L. On notera $x_0$ l'abscisse du point le plus haut de la courbe C atteint par l'eau. Donner la nouvelle expression des composantes de $\overrightarrow{F_{eau}}$ par un calcul direct.
5. Application à un profil parabolique $z = \dfrac{x^2}{h}$.
6. Commenter les valeurs obtenues pour la composante suivant x de $\overrightarrow{F_{eau}}$ dans les deux cas.




7. Ne voyez-vous pas une méthode rapide pour calculer la valeur de la composante suivant x de la force de pression avec un profil quelconque inconnu ? (pensez à isoler une partie de fluide adaptée)

# SOLUTION des EXERCICES – TH1 / TH2 – Bases de la Thermo – Statique – Feuille 1/2

## Bases de la Thermo : Gaz Parfaits

### Exercice 1 : Pression d'un pneu

1. Chauffage à $t_2 = 57°C$ $\boxed{\Rightarrow P_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot P_1 = 2{,}2 bar}$
2. Il ramène à $P_1 = 2{,}0 bar$, $\boxed{\Rightarrow P_1' = \frac{T_1}{T_2} \cdot P_1 = 1{,}8 bar}$
3. $P_{max} = 6bar$ $\Rightarrow T_{max} = \frac{P_{max}}{P_1} \cdot T_1 = 900K$ / $\boxed{t_{max} = 627°C}$

### Exercice 2 : Dissociation du Brome à haute T

1. Volume $\boxed{\Rightarrow V_0 = \frac{mRT_0}{2MP_0} = 0{,}961L}$
2. Dissociation → plus de molécule de gaz. On sait que le comportement d'un gaz parfait est le même pour tous les gaz (à faible pression), le $Br_2$ entièrement dissocié prendrait 2 fois plus de place (car les atomes Br seraient seuls).
3. Dissociation partielle : Si x molécules de $Br_2$ se dissocient, alors il se forme 2x molécules de Br et il reste $n_0$-x molécules de $Br_2$. Ainsi : $n_{gaz} = (n_0 - x) + 2x = n_0 + x = \frac{PV}{RT}$.

   Coef de dissociation : $\boxed{\alpha = \frac{x}{n_0} = \frac{n_{gaz} - n_0}{n_0} = \frac{V_0'}{V_0} - 1 = 0{,}24}$

### Exercice 3 : Vidange d'un réservoir d'air comprimé

1. Equilibrage des pressions : $\boxed{P_1 = \frac{P_0V + pv}{V + v} = 9{,}2 bar}$
2. Nouvelle pression : $\boxed{P_1 = \frac{P_1V + pv}{V + v} = 8{,}5 bar}$
3. Récurrence : $\boxed{P_{n+1} = \frac{P_nV + pv}{V + v}}$ → Pression limite $P_\infty = p$.

### Exercice 4 : Ouverture d'une bouteille d'air comprimé

1. Quantité d'air : $\boxed{n = \frac{P_1V_1}{RT_1} = 36{,}3 mol \;/\; m = nM = 1{,}05 kg}$
2. Masse volumique : $\boxed{\rho = \frac{m}{V_1} = \frac{MP_1}{RT_1} = 17{,}6 kg.m^{-3}}$

Attention, la densité pour un gaz est la comparaison de sa masse volumique par rapport à celle de l'air dans les mêmes conditions.

Ici, on a donc $\boxed{d = 1 !!!}$ (Question piège)

En règle générale, on aura $d = \frac{\rho}{\rho_{air}} = \frac{M}{M_{air}} = \frac{M}{29 g.mol^{-1}}$

3. Bouteille, $n_{O_2} = 0{,}21n$ $\boxed{\Rightarrow m_{O_2} = 0{,}21n \cdot M_{O_2} = 0{,}24kg}$
4. Volume : $nRT = P_1V_1 = P_2V_2$ $\boxed{\Rightarrow V_2 = 900L}$

### Exercice 5 : Pompe à vide

1. Même méthode que dans le TD – conservation de la quantité : $\boxed{\Rightarrow P_1 = \frac{V}{V + V_0} \cdot P_0}$
2. De même : $\boxed{\Rightarrow P_2 = \frac{V}{V + V_0} \cdot P_1 = \left(\frac{V}{V + V_0}\right)^2 \cdot P_1}$
3. N aller-retours : $\boxed{\Rightarrow P_N = \left(\frac{V}{V + V_0}\right)^N \cdot P_1}$
4. On a $N = \dfrac{\ln\left(\frac{P_N}{P_1}\right)}{\ln\left(\frac{V}{V + V_0}\right)} = 1385$, $\boxed{\Rightarrow t = \frac{N}{300} = 277s = 4{,}62 \min}$

### Exercice 6 : Thermomètre différentiel

1. Deux lois des GP : $\begin{cases} P_f(V_0 + Sx) = n_0RT_1 \\ P_f(V_0 - Sx) = n_0RT_0 \end{cases}$, les gaz étant à l'équilibre mécanique (pression égale au milieu pour avoir l'équilibre de l'indice de mercure), mais pas à l'équilibre thermique, qui est plus lent.

   Ainsi : $\frac{T_1}{T_0} = \frac{(V_0 + Sx)}{(V_0 - Sx)}$ $\Rightarrow T_1\left(1 - \frac{Sx}{V_0}\right) = T_0\left(1 + \frac{Sx}{V_0}\right)$

   D'où : $T_1 - T_0 = (T_1 + T_0)\frac{Sx}{V_0} = (T_1 - T_0)\frac{Sx}{V_0} + 2T_0\frac{Sx}{V_0}$

   Et $(T_1 - T_0)\left(1 - \cancel{\frac{Sx}{V_0}}\right) = 2T_0\frac{Sx}{V_0}$ $\boxed{\Rightarrow T_1 - T_0 = 2T_0\frac{S}{V_0}x}$

   On a bien $T_1 - T_0 = ax$, avec $\boxed{a = \frac{2T_0S}{V_0} = 0{,}2°C.cm^{-1}}$

2. Pour x = 5cm, on a bien $\frac{Sx}{V_0} = 1{,}7.10^{-3} \ll 1$ et $\boxed{\Delta T = 1°C.}$

   Ce type de thermomètre est donc très précis, pour mettre en évidence de petites différences de températures.

### Exercice 7 : Oscillations d'un piston

1. Forces … Poids compensé par la réaction du support (vertical), Pression à droite et à gauche du piston.

Ainsi : $P_1 = \frac{n_0RT_0}{V_1} = \frac{n_0RT_0}{S(L + x)}$ et $P_2 = \frac{n_0RT_0}{V_2} = \frac{n_0RT_0}{S(L - x)}$

2. PFD : $P_1S - P_2S = m\ddot{x} = \frac{n_0RT_0}{L + x} - \frac{n_0RT_0}{L - x}$

   Ainsi : $\boxed{m\ddot{x} = P_0V_0\left(\frac{1}{L + x} - \frac{1}{L - x}\right)}$

3. Petits déplacements, on utilise un développement limité : $\frac{1}{1 + \alpha} \approx 1 - \alpha$ et $\frac{1}{1 - \alpha} \approx 1 + \alpha$, d'où

$$m\ddot{x} = \frac{P_0V_0}{L}\left(\frac{1}{1 + x/L} - \frac{1}{1 - x/L}\right) = \frac{P_0V_0}{L}\left(1 - \frac{x}{L} - 1 - \frac{x}{L}\right) = -\frac{2xP_0V_0}{L^2}$$

Et ainsi, oscillateur harmonique $\boxed{\ddot{x} + \frac{2P_0V_0}{mL^2}x = 0, \; \omega_0 = \sqrt{\frac{2P_0V_0}{mL^2}}}$

# Fluides Réels et Coefficients Thermoélastiques

## Exercice 8 : Gaz de Van Der Waals

1. Terme en $1/r^{12}$ → répulsif à faible distance
   Terme en $1/r^6$ → attractif à moyenne distance
   Dérivée nulle pour $r = \sigma = 3{,}8.10^{-10}$m (dériver l'Ep…)
   1er Terme correctif : covolume b = volume minimal d'une molécule, du à la force répulsive à faible distance.
   2nd Terme correctif : pression moléculaire $P_m = \frac{-n^2 a}{V^2}$, qui atténue la pression cinétique (du GP) à moyenne distance en raison de la force d'attraction entre les molélcules.
2. Limite de validité pour l'argon :
   On a $PV = Nk_BT$, pour 1 molécule de volume sphérique de rayon r = 1nm, cela donne $\boxed{P_{\max} = \frac{k_BT}{\frac{4}{3}\pi r_{\min}^3} = 9\ bar}$
   (En réalité, on peut aller largement plus haut…)

## Exercice 9 : Gaz parfait et gaz réel de Dieterici

1. GP : $\boxed{P = \frac{nRT}{V} = 41{,}6\ bar}$
2. Simplification : $P(V_m - b) = RT(1 - A/V_m)$
   2.a) Si $V \to +\infty$, on retrouve PV = nRT.
   2.b) DL : $P(V_m - b) = RT\exp\left(-\frac{a}{RTV}\right) \approx RT\left(1 - \frac{a}{RTV}\right)$
   Donc $\boxed{A = \frac{a}{nRT}}$
   2.c) b : covolume, $-a/V_m^2$ : Pression moléculaire (voir cours)
3. Avec ce modèle $\boxed{P = 42 bar}$ (expression simplifiée ou non)
4. Ecart relatif $\boxed{\frac{(PV_m)-(PV_m)_{GP}}{(PV_m)_{GP}} = \frac{n\left(b - \frac{a}{RT}\right)}{V} = 1{,}13\%}$

## Exercice 10 : Coefs thermoélastiques d'un gaz réel

1. b : Volume minimal d'une molécule (voir cours).
2. Dilatation isobare $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{V}\cdot\frac{R}{P} = \frac{R}{RT+Pb}$

   Compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{V}\cdot\frac{RT}{P^2} = \frac{V-b}{RT+Pb}$

## Exercice 11 : Dilatation du mercure

1. Volume quasi constant, $\boxed{\begin{cases}\delta V \approx \alpha V\cdot\Delta T = 10{,}9\ mL\\ V_1 = 1{,}011\ L\end{cases}}$.
2. Avec $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad \Rightarrow \frac{dV}{V} = \alpha\cdot dT$
   On intègre : $\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \alpha(T - T_0)$ $\boxed{\Rightarrow \begin{cases}V = V_0\cdot e^{\alpha(T-T_0)}\\ V_1' = 1{,}011\ L\end{cases}}$
   Cela donne exactement le même résultat (bonne approx)
3. Besoin d'un réservoir car même si le mercure a une forte dilatation (par rapport aux autre liquides), elle reste faible (1%) et il faut un grand V de mercure pour la percevoir.

## Exercice 12 : Compression du mercure

1. Volume quasi constant, $\boxed{\begin{cases}\delta V \approx -\chi_T V\cdot\Delta P = -3{,}8\ mL\\ V_1 = 996{,}2\ mL\end{cases}}$.
2. Avec $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \quad \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\chi_T\cdot dP$
   On intègre : $\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = -\chi_T(P - P_0)$ $\boxed{\Rightarrow \begin{cases}V = V_0\cdot e^{-\chi_T(P-P_0)}\\ V_1' = 996{,}2\ mL\end{cases}}$
   Egalement une bonne approximation

## Exercice 13 : Compression d'un volume d'eau

1. $a = 8{,}25.10^{-6}\ K^{-2}$, $k = 6{,}94.10^{-10}\ Pa^{-1}$ et $b = 7{,}0.10^{-13}\ Pa^{-1}.K^{-1}$.
2. On dérive : $\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = V_0\left[2a(T-T_0) + b(P-P_0)\right] = 0$
   Cela donne : $\boxed{T_m = T_0 - \frac{b}{2a}(P-P_0)}$ il s'agit bien d'un minimum, car la dérivée seconde est positive = $2aV_0$.
   Pour $P = P_0$, on a $T_m = T_0 = 277K = 4°C$.
3. Coefficients thermoélastiques : $\begin{cases}\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P\\ \chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T\end{cases}$

   D'où : $\begin{cases}\alpha = \frac{2a(T-T_0)+b(P-P_0)}{1+a(T-T_0)^2-(k-bT)(P-P_0)} = \boxed{\alpha_{(P=P_0)} = \frac{2a(T-T_0)}{1+a(T-T_0)^2}}\\ \chi_T = \frac{(k-bT)}{1+a(T-T_0)^2-(k-bT)(P-P_0)} = \boxed{\chi_{T(P=P_0)} = \frac{k-bT}{1+a(T-T_0)^2}}\end{cases}$

   AN : $\alpha = 9{,}9.10^{-5}\ K^{-1}$, et $\chi_T = 4{,}96.10^{-10}\ Pa^{-1}$.
4. Valeurs faibles des coefs $\boxed{\to v = v_0 = \text{constante}}$

## Exercice 14 : Thermomètre à alcool

1. Equation d'état à partir des coefficients thermoélastiques, V étant une fonction de 2 variables : (voir cours de maths…)
   $$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP = \alpha V dT - \chi_T V dP$$
   Réservoir plein : $dV = 0$ $\boxed{\Rightarrow \Delta P = \frac{\alpha\Delta T}{\chi_T} = 165\ bar}$
   C'est énorme, le réservoir va exploser, il faut laisser de l'air.
2. Equation d'état : On sépare les variables pour intégrer
   $\frac{dV}{V} = \alpha dT - \chi_T dP$ $\boxed{\Rightarrow \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \alpha(T-T_0) - \chi_T(P-P_0)}$
3. Ecart relatif : $e = \frac{|V-V_0|}{V_0} = \exp\left[\alpha(T-T_0) - \chi_T(P-P_0)\right] - 1$
   Variation de 10K à pression fixée : $\boxed{e = 11{,}8\%}$
   Variation de 10bar à température fixée : $\boxed{e = 0{,}08\%}$.
4. Le modèle incompressible est validé, mais l'indilatable est plus douteux…

## Exercice 15 : Thermomètre à gaz

1. Pour un GP : $\boxed{\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T} \neq \overline{\alpha}}$ → Notion différente
2. Mais $\boxed{V = \overline{\alpha}\cdot V_0\left(1/\overline{\alpha} + t\right) = \overline{\alpha}\cdot V_0 T}$ → Proportionnalité.
   Dilatation isobare $\boxed{\alpha = \frac{\overline{\alpha}\cdot V_0}{\overline{\alpha}\cdot V_0 T} = \frac{1}{T}}$ → On retrouve le GP.
3. De 0°C à 30°C, variation de 10% → Forte variation / précis

# SOLUTION des EXERCICES – TH1 / TH2 – Bases de la Thermo – Statique – Feuille 2/2

## Statique des Fluides – Fluide Incompressible

### Exercice 16 : Influence de la forme

La pression ne dépend QUE de la hauteur d'eau dans le récipient, donc la pression de l'eau sur le fond est la même dans les deux cas. Et puisque la surface est la même, la force de pression (F = P × S) est la même.

### Exercice 17 : Remontée d'un cube

Le cube NE PEUT PAS remonter à la surface, puisque il n'est pas immergé dans le fluide, donc ne subit pas de poussée d'Archimède. Le fluide ne fait qu'exercer son poids sur le cube, il est comme « aspiré » par le fond.

Cependant, dans la réalité, c'est quasiment impossible. Il suffit d'un filet d'eau passant sous le cube pour qu'il remonte dans le cas où il est plus léger que l'eau. S'il est plus lourd, dans tous les cas il restera au fond.

### Exercice 18 : Equilibre de la feuille ?

Prenons le cas où le verre est retourné à la verticale pour simplifier les explications. La feuille est soumise à son poids (négligeable), à la force exercée par l'eau sur elle, égale au poids de l'eau $P_{eau}$ = mg = 2,5N, et finalement à la pression de l'air extérieur ($F_{air} = P_0 S = P_0 \times \pi \times (d/2)^2$ = 785N.

On remarque que la pression de l'air est supérieure à la force de l'eau sur la feuille, donc le fluide reste en haut !!! Une fois de plus, cette situation ne se retrouve presque jamais dans la réalité.

### Exercice 19 : Densimètre

1. $\boxed{\rho_0 V = \rho_1 \left(V + n_1 v\right)}$.
2. $\boxed{v = \left(\dfrac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)\dfrac{V}{n_1} = 35,2\ mm^3, \text{ d'où } l = 2,8\text{mm.}}$
3. Benzène : $\boxed{d = \dfrac{V}{V + n_2 v} = 0,88}$

### Exercice 20 : Débordera ? Débordera pas ?

1./2. $\boxed{v_{im} = \dfrac{\mu}{\mu_0} V = 92\% \cdot V}$. Fondu, le glaçon occupera le volume V (équivalent au volume du fluide déplacé qui compense parfaitement le poids du glaçon).

3. Pas la peine d'avoir une éponge… cela ne va pas déborder. Dans le whisky, qui est moins dense que l'eau, le fluide déplacé aura un volume plus grand pour compenser le poids duglaçon. Quand le glaçon redevient liquide, le niveau va donc baisser.

### Exercice 21 : Equilibre d'un bécher

La poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi} = -\rho_{eau} hS \cdot \vec{g}$ (le fluide est bien immergé grâce au filet d'eau sous le bécher) doit être supérieure au poids de l'ensemble $\vec{P} = m \cdot \vec{g} + V_A d \rho_{eau} \cdot \vec{g}$

Ainsi : $\boxed{h > h_C = \dfrac{m + V_A d \rho_{eau}}{\rho_{eau} \pi R^2} = 7,33\ cm}$

### Exercice 22 : Remplissage d'une citerne

1. $\boxed{P_1 = \dfrac{T_1}{T_0} P_0 = 1,2\ bar}$
2. La pression dans le fluide ne dépend que de la hauteur, donc $\boxed{P_2 = P_0 + \mu g d = 1,4\ bar}$ (Le gaz absorbe bien les variations de pression)

### Exercice 23 : Oscillations d'un bouchon lesté

1. PFS.. $\boxed{hS\mu_0 = m + HS\mu}$
2. PFD… $\boxed{h\ddot{z} + gz = 0}$
3. $\boxed{T = 2\pi\sqrt{h/g}}$

### Exercice 24 : Cloche renversée

1. Forces : Toutes les forces horizontales s'annulent 2 à 2 (pression de l'air extérieur, de l'air intérieur, de l'eau). Il reste 3 forces verticales : → Poids : $\vec{P} = -mg \cdot \vec{e_z}$

   → Pression de l'air extérieur : $\overrightarrow{F_{ext}} = -P_0 S \cdot \vec{e_z}$

   → Pression de l'air intérieur : $\overrightarrow{F_{int}} = +PS \cdot \vec{e_z}$

   Equilibre : PFS $\vec{P} + \overrightarrow{F_{ext}} + \overrightarrow{F_{int}} = \vec{0} = \left(-mg - P_0 S + PS\right) \cdot \vec{e_z}$

   Il faut donc $\boxed{P = P_0 + \dfrac{mg}{S}}$

2. Le gaz à l'intérieur est celui qui occupe tout le volume de la cloche à l'air ambiant ($P_0$) : $P\left(h - y\right)S = nRT = P_0 hS$,

   cela donne $\boxed{y = h \dfrac{1}{1 + \dfrac{P_0 S}{m g}}}$ et on a dans le fluide :

   $P = P_0 + \rho g\left(x - y\right)$, donc $\boxed{x = y + \dfrac{P - P_0}{\rho g} = \dfrac{h}{1 + \dfrac{P_0 S}{mg}} + \dfrac{m}{\rho g}}$.

3. Il faut x < h, ce qui donne $V_0 > V_C$ *avec* $\boxed{V_C = \dfrac{m}{\rho}\left(1 + \dfrac{mg}{P_0 S}\right)}$

4. Si on tient compte de l'épaisseur des parois, on a une force verticale vers le haut sur les parois, et les surfaces sur lesquelles s'exercent l'air en haut sont différentes.

### Exercice 25 : Fluide en rotation uniforme

1. Le fluide tourne également car il adhère par l'intermédiaire de la viscosité aux parois. Il y aura un régime transitoire au moment de la mise en rotation, avant qu'il s'immobilise dans le référentiel tournant…

2. Forces volumiques : poids $\overrightarrow{f_{vP}} = -\rho g \cdot \vec{e_z}$ et inertie d'entrainement (centrifuge) $\overrightarrow{f_{vC}} = +\rho\omega^2 r \cdot \vec{e_r}$ .

PFS : $\boxed{\left(\dfrac{\partial P}{\partial r}\right)_{\theta,z} \vec{e_r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial P}{\partial \theta}\right)_{r,z} \vec{e_\theta} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z}\right)_{r,\theta} \vec{e_z} = \overrightarrow{f_{vP}} + \overrightarrow{f_{vC}} = \rho\omega^2 r \cdot \vec{e_r} - \rho g \cdot \vec{e_z}}$

3. $\begin{cases} \partial P/\partial r = \rho\omega^2 r \\ \partial P/\partial \theta = 0 \\ \partial P/\partial z = -\rho g \end{cases}$ $\Rightarrow$ P ne dépend pas de $\theta$

Pour une fonction de plusieurs variables : (voir cours de math)

$$\boxed{dP = \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_z dr + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_z dz = \rho\omega^2 r\cdot dr - \rho g\cdot dz}$$

Cette expression s'écrit : $dP = d\left(\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z\right)$ et s'intègre :

$$P(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + Cstte$$

Ainsi, sur la surface libre : $P(r,z) = P_0 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + Cstte$

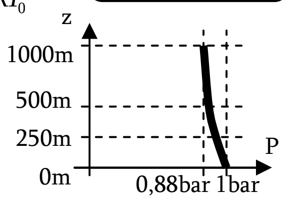
Et la constante : $Cstte = P_0 - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g z = P_0 + \rho g z_{\min}$

Ainsi : $\boxed{\forall\theta,\quad z(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_{\min} \rightarrow \text{Paraboloïde de révolution}}$

# Statique des Fluides – Fluide Compressible

## Exercice 26 : Modèle idéal de l'atmosphère isotherme

1. Voir TD : $\frac{dP(z)}{dz} = -\rho(z)g = -\frac{MP}{RT_0}g$ et $\boxed{P = P_0\cdot e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}}$
2. AN : $\begin{cases} P_{(z=250m)} = 0,97\ bar \\ P_{(z=500m)} = 0,94\ bar \\ P_{(z=250m)} = 0,89\ bar \end{cases}$




## Exercice 27 : Modèle plus réaliste pour la troposphère

1. On a $\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{MP}{RT}g \Rightarrow \frac{R}{Mg}\cdot\frac{dP(z)}{P} = -\frac{dz}{T_0 + Az}$

   On intègre : $\boxed{P = P_0\left(1 + \frac{A}{T_0}z\right)^{\frac{-Mg}{AR}}}$
2. AN : A z=11km, $P_1 = 0,226\,bar$ et $T_1 = 216K = -57°C$

## Exercice 28 : Double vitrage

→ Atmosphère isotherme $P = P_0\cdot e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}$ $\boxed{\rightarrow h_{max} = 843\text{m.}}$

## Exercice 29 : Atmosphère de température variable

1. Démonstration de $dP = -\rho(z)g_0 dz$ … Voir Cours…
2. A en K, est la température $T_0$ au sol (z = 0), et $z_0$ en m.
3. On donne A = $T_0$ = 273K et dT/dz = -A/$z_0$ → $z_0$ = 36,4km.
4. Pression $\boxed{P(z) = P_0\exp\left[-\frac{Mg_0}{RT_0}\left(\frac{z^2}{2z_0} + z\right)\right]}$
5. AN sur l'Everest : P = 0,29bar.

## Exercice 30 : Altitude plafond d'un ballon sonde

1. Masse d'hélium : $\boxed{m_{He} = 0{,}5\text{g.}}$
2. Stabilisation : $\boxed{P_1 = \frac{RT_0}{M_{air}}\left(\frac{m + m_{He}}{V}\right) = 0,70\ bar}$
3. Plafond : $\boxed{z_1 = 3\text{km}}$

# Statique des Fluides – Calcul Forces de Pression

## Exercice 31 : Etude d'un corps flottant

Bilan des forces : les F horizontales s'annulent, et à la verticale :

$$F_{op} - Mg - P_0 S + (S-s)(P_0 + \rho g h) + s(P_0 - \rho g(H-h-e)) = 0$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_{op}} = \left[Mg + \rho g\left(s(H-e) - Sh\right)\right]\cdot\vec{e_z}}$$

Avec Archimède : $\vec\Pi = +\rho Shg\cdot\vec{e_z}$, mais attention au solide qui déplace l'eau (on doit isoler le verre plus l'eau qu'il contient), donc le poids du système est $\vec P = -\left(M + \rho s(H-e)\right)g\cdot\vec{e_z}$

PFS… $\boxed{\overrightarrow{F_{op}} = \left[Mg + \rho g\left(s(H-e) - Sh\right)\right]\cdot\vec{e_z}}$

Remarque : La pression de l'air a été supposée constante, ce qui équivaut à dire que la poussée d'Archimède due à l'air est nulle.

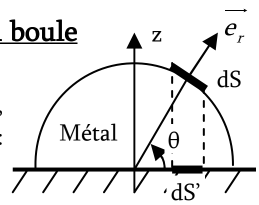
## Exercice 32 : Pression sur la paroi d'une piscine

On découpe la paroi en surface élémentaire dS horizontale : $dS = L\cdot dl = L\cdot\frac{dz}{\cos\alpha}$ et on intègre pour z variant de 0 à h.

Chaque surface est soumise à la pression de l'air $P_0$ et à celle de l'eau $P_0$ + ρgz en sens opposé. Ainsi : $\overrightarrow{dF} = \left[(P_0 + \rho g z) - P_0\right]\cdot\overrightarrow{dS}$ (dS orienté de l'eau vers l'extérieur)

Ainsi : $\boxed{\vec F = \int_0^l \rho g z\cdot\overrightarrow{dS} = \int_0^l \rho g z\cdot L\frac{dz}{\cos\alpha}\cdot\vec n = \frac{\rho g L h^2}{2\cos\alpha}\cdot\vec n = 1{,}1.10^5 N}$

## Exercice 33 : Pression sur une demi boule




**a) Calcul direct**

→ Pression de l'air : verticale vers le bas, on intègre seulement sur cette direction :

$$F_z = \iint_S \left(-P_0 dS\cdot\vec{e_r}\right)\cdot\vec{e_z} = -P_0\iint_S dS\cdot\sin\theta$$

Et en projection : $F_z = -P_0\iint_S dS' = -P_0\Sigma$ $\boxed{\Rightarrow \vec F = --P_0\pi R^2\cdot\vec{e_z}}$

Où Σ est la surface de la boule au sol, car on remarque que dS.sinθ est la projection dS' de dS sur le sol. AN : $F_z = -3{,}1.10^5 N$

**b) Par le théorème d'Archimède**

1. Calcul direct tout à fait possible, mais plus complexe.
2. Pour le théorème d'Archimède, le solide doit être immergé.
3. La poussée d'Archimède $\vec\Pi = +\rho g\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right)\cdot\vec{e_z}$ traduit le bilan de toutes les forces pressantes : $F_1$ sur la partie sphérique, et $F_2$ (facile à obtenir) sur le plat : $\vec\Pi = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.

Ainsi, $\boxed{\vec{F_1} = \vec\Pi - \vec{F_2} = \left[\rho g\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) - (P_0 + \rho g h)\pi R^2\right]\cdot\vec{e_z}\left(= -3{,}6.10^5 N\right)}$

## Exercice 34 : Force sur un barrage

2. $\overrightarrow{F_{eau}} = \int_{z=-H}^{0}(P_0 - \rho g z)L\,dz\cdot\vec{e_x} = LH\left[P_0 + \rho g\frac{H}{2}\right]\cdot\vec{e_x}$
3. On identifie les moments, qui doit s'appliquer en C :

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_{O(\vec F)}} = \iint_S d\overrightarrow{M_{O(\vec F)}} = \iint_S \overrightarrow{OM}\wedge d\vec F_{(M)} = \iint_S -z(P_0 - \rho g z)L dz\cdot\vec{e_y} = \ldots \\ \overrightarrow{M_{O(\vec F)}} = \overrightarrow{OC}\wedge\vec F = -z_C\cdot LH\left[P_0 + \rho g\frac{H}{2}\right]\cdot\vec{e_y} \Rightarrow \boxed{z_C = \frac{H}{2}\cdot\frac{P_0 + \rho g\frac{H}{3}}{P_0 + \rho g\frac{H}{2}} < \frac{H}{2}} \end{cases}$$

4. Profil du barrage modifié… même composante suivant x.
7. Possibilité d'isoler partie de fluide avec un bord droit à gauche, et la paroi du barrage à droite → Calcul simplifié.