

# A) Séries numériques.

On se place dans le corps<sup>i</sup>  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

0) Théorèmes utiles sur les suites : Une suite est une application<sup>ii</sup> d'une partie<sup>iii</sup> de l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{K}$  ;  $n$  étant un entier naturel, l'image de  $n$  par  $u$  est notée le plus souvent  $u_n$  au lieu de  $u(n)$ . En tant qu'application, on pourrait se contenter d'appeler la suite  $u$ , mais on utilise plutôt la notation  $(u_n)_{n \in I}$ ,  $I$  étant une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , ou plus simplement  $(u_n)$  quand il n'y a pas d'ambiguïté sur son ensemble de définition.

Si  $f$  est continue sur un intervalle contenant tous les termes d'une suite convergente  $(u_n)$  à partir d'un certain rang alors :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n)$ .

- *Conséquence* : Si  $u_{n+1} = f(u_n)$  (avec les conditions du théorème sur  $f$ ) et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$  alors  $a = f(a)$ .

- *Remarque* : Si  $u_{n+1} = f(u_n)$  alors  $u_{n+1} - u_n = f^n(u_1) - f^n(u_0)$  donc si  $f$  croissante alors  $u_{n+1} - u_n$  est du signe de  $u_1 - u_0$ . (Si  $f$  décroissante alors  $f^2$  croissante, on étudie donc les deux sous-suites des termes de rangs respectifs pairs et impairs).

## 1) Séries géométriques. Série harmonique, série harmonique alternée. Séries de Riemann.

- *Définition générale d'une série* : Étant donnée une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , soit  $S_n$  la suite définie comme somme de ses termes :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

*Ancienne définition* : La série de terme général  $u_n$  est l'objet<sup>iv</sup> représentant la limite de la suite  $S_n$  si elle existe, notée plus simplement :  $\sum_0^\infty u_n$ . Une série est alors une écriture.

*Nouvelle définition* : Une série est la donnée d'un couple de deux suites dont la seconde est faite des sommes partielles de la première  $(u_n, \sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$ . On écrit ce couple en abrégé par  $\sum u_n$  (sans les bornes, ce qui signifie : « série de terme général  $u_n$  ») ; noté ainsi,  $\sum_{n=0}^\infty u_n$  est à  $\sum u_n$  ce que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  est à  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Les termes de la suite  $(S_n)$  sont les sommes partielles de la série (ou troncature au  $n$ -ième terme). Lorsque cette limite est finie on dit que la série est convergente, sinon elle est divergente ; lorsqu'elle est convergente, la limite est appelée somme de la série. Une série peut diverger de deux façons différentes : d'une part si les sommes partielles admettent une limite infinie ( $\pm\infty$ ), par exemple la série de terme général  $1$  ; d'autre part si elles n'ont pas de limite du tout, par exemple la série de terme général  $(-1)^n$  (chacune de ces deux catégories peut contenir des séries grossièrement divergentes, cf. §2). Cette notation reste valide si le premier terme n'est pas  $0$ , par exemple :  $\sum_1^\infty 1/n^2$ , ou

encore si on se place dans une partie stricte de  $\mathbb{N}$ , par exemple :  $\sum_{n \text{ impair}} \cos(2\pi/n)$ .

• *Série géométrique* :

$$\text{Pour } q \neq 1 : \sum_{k=0}^n q^k = (1 - q^{n+1}) / (1 - q).$$

$$\text{Pour } |q| < 1 : \sum_{k=0}^\infty q^k = 1 / (1 - q) \text{ (y compris si } q \text{ est complexe).}$$

- *Preuves* : On calcule  $(1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q) = (1 + q + q^2 + \dots + q^n) - q(1 + q + q^2 + \dots + q^n)$ ; la fin est immédiate. Quant à la limite, c'est une conséquence du fait que  $|q| < 1 \Rightarrow q^{n+1} \rightarrow 0$ .

- *Applications* :  $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$ ,  $\sum_1^\infty 9 \cdot 10^{-n}$  (autre méthode : soit s cette somme, on calcule  $10s - 9$ ). (On trouve pour la première :

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sin((n + 1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}\right), \text{ et : } \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} - \frac{\cos((n + 1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}\right).$$

• *Série harmonique* :  $\sum_1^\infty 1/n = +\infty$ .

*Série harmonique alternée* :  $\sum_1^\infty (-1)^{n+1}/n = \ln(2)$ .

- *Preuves* : On montre que  $v_n = \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^n} > \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ , puis que  $\sum_1^\infty \frac{1}{n} = 1 + \sum_0^\infty v_n$ . La preuve concernant la série harmonique alternée est la question c) de l'exercice suivant.

- *Exercice* :

a) Soit  $u_n = 1/n$ ,  $v_n = \ln(1 + 1/n)$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$  et  $T_n = \sum_{k=1}^n v_k$ . Montrer que  $u_n \geq v_n$ , et  $T_n = \ln(n + 1)$ . En déduire que la série de terme général  $u_n$  diverge (vers  $+\infty$ ).

b) En conservant les notations du a), montrer que  $u_{n+1} \leq v_n$ . Soit alors  $U_n = S_n - \ln(n+1)$ , et  $V_n = S_n - \ln(n)$ ; encadrer  $V_n - U_n$ , puis montrer que ce sont des suites positives adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une limite commune  $\gamma$  ( $\gamma \approx 0,577215664901533$  est la constante d'Euler). En déduire :  $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n \sim \ln(n)$  quand  $n$  assez grand. (*Remarque* : Comme  $\ln(n) + \gamma \leq S_n \leq \ln(n + 1) + \gamma = \ln(n) + \gamma + o(1)$ , alors  $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ ). (Plus précisément :  $S_n = \ln(n) + \gamma + 1/2n - 1/12n^2 + o(1/n^2)$ ).

*Conséquence amusante* : Comme  $\ln(n) < S_n - \gamma < \ln(n + 1)$ , alors :  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $E(e^{1+1/2+1/3+\dots+1/n-\gamma}) = n$ .

c) Soit  $u_n$  la suite géométrique de raison  $-x$  (pour  $x \neq -1$ ); calculer  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . En déduire, en intégrant l'égalité obtenue sur  $[0, 1]$ , et en utilisant les théorèmes de majoration des intégrales, que :  $\sum_1^\infty (-1)^{n+1}/n = \ln(2)$ .

( $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k - 1/(1+t) = (-1)^{n+1} t^{n+1}/(1+t)$ , et :  $0 \leq \int_0^1 t^{n+1} dt/(1+t) \leq \int_0^1 t^{n+1} dt$ ).

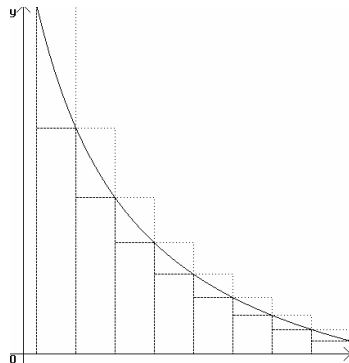
• *Séries de Riemann*<sup>1</sup> :

Pour  $\alpha \leq 1$  :  $\sum_1^\infty 1/n^\alpha = +\infty$ .

Pour  $\alpha > 1$  :  $\sum_1^\infty 1/n^\alpha$  converge.

Pour  $\alpha = 2$  :  $\sum_1^\infty 1/n^2 = \pi^2/6$ .

- *Preuve* : Intégration pour  $\alpha > 0$   
(le cas  $\alpha \leq 0$  est trivial).



<sup>1</sup> Georg Friedrich Bernhard Riemann : 1826-1866.

- *Encadrement du reste* :  $\int_{n+1}^{\infty} dx/x^{\alpha} \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq \int_n^{\infty} dx/x^{\alpha}$  ; et, en notant  $s$  la somme de la série (pour  $\alpha > 1$ ) :  
 $s = \sum_{k=1}^n 1/k^{\alpha} + R_n$  avec  $1/(\alpha - 1)(n + 1)^{\alpha-1} \leq R_n \leq 1/(\alpha - 1)n^{\alpha-1}$ .

Donc, si  $\alpha$  est un entier supérieur à 2 :  $R_n = o(\frac{1}{n^{\alpha-2}})$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

La fonction qui à un complexe<sup>v</sup>  $z$  associe, lorsqu'elle converge, la série :  $\zeta(z) = \sum_1^{\infty} 1/n^z$ , est appelée fonction zêta de Riemann. Par exemple :  $\zeta(2) = \pi^2/6$ ,  $\zeta(4) = \pi^4/90$ ,  $\zeta(6) = \pi^6/945$ ,  $\zeta(8) = \pi^8/9450$ . Ces séries sont souvent utiles dans les théorèmes de comparaison ou d'équivalence.

- *Exemples* : La série de terme général  $u_n = 1/(n^2 + \sin(n))$  est (à encadrer) *équivalente* à la série de terme général  $v_n = 1/n^2$ , elle est donc convergente. La série de terme général  $u_n = 1/\ln(n)$  est majorante de celle de terme général  $1/n$ , elle est donc divergente. (Plus généralement, pour  $K > 0$ , l'inégalité vraie à partir d'un certain rang :  $0 \leq u_n \leq K/n^{\alpha}$  avec  $\alpha > 1$  implique la convergence ; tandis que :  $u_n \geq K/n^{\alpha}$  avec  $\alpha \leq 1$  implique la divergence).

## 2) Convergence d'une série et limite de son terme général.

- *Proposition* : Si le terme général d'une série ne tend pas vers 0 elle diverge (exemple :  $\sum \sin(n)$ ).  
 La convergence vers 0 est donc une condition nécessaire mais pas suffisante (exemple de la série harmonique).

(On le démontre avec  $S_n - S_{n-1}$ ). Dans le cas où le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge **grossièrement**.

- *De même* : Si la série de terme général  $u_n$  converge, alors la série  $s' = \sum_{n=N}^{\infty} u_n$  converge, et la suite  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$  converge vers 0. (De même, si elle diverge la série  $s'$  diverge). (*Ce ne sont pas des corollaires du précédent*).

- *Remarque* : Étant donnée une suite  $(u_n)$  et deux entiers naturels  $p$  et  $q$ , soit les deux suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies par :  $v_n = u_{n+p}$  et  $w_n = u_{n+q}$  ; alors les séries de termes généraux respectifs  $v_n$  et  $w_n$  sont de même nature<sup>2</sup>. (On le démontre en faisant leur différence qui est constante).

## 3) Linéarité, cas particulier des séries de complexes.

### a) Somme.

La somme de deux séries convergentes est convergente.
---

La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente.
--

• Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent, alors  $\sum(u_n + v_n)$  et  $\sum(u_n - v_n)$  convergent. (*Corollaire* : Si  $\sum(u_n + v_n)$  et  $\sum v_n$  convergent, alors  $\sum u_n$  converge).

- *Preuve* : Soit  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$ , les sommes partielles de deux séries convergentes. Comme :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ , il s'en suit que :  $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ . Idem pour la différence.

• Si  $\sum u_n$  converge et  $\sum v_n$  diverge, alors  $\sum(u_n + v_n)$  diverge.

- *Preuve* : Car si  $\sum(u_n + v_n)$  convergeait, alors comme  $\sum u_n$  converge aussi, il en résulterait que la différence convergerait, à savoir  $\sum v_n$ .

<sup>2</sup> Convergentes simultanément, ou divergentes simultanément.

Il est interdit de séparer une somme convergente en deux sommes divergentes. Si  $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$  converge, ça ne prouve pas que  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$  convergent. Par exemple :  $u_n = n$  et  $v_n = 1/n^2 - n$  sont les termes généraux de séries divergentes quand leur somme donne une série convergente. Il y a cependant des cas particuliers où c'est vrai, par exemple si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont des suites positives, ou bien si  $(u_n)$  est une suite réelle et que les  $v_n$  sont des imaginaires purs.

Une série de complexe ne sera donc convergente que si les séries formées par sa partie réelle et sa partie imaginaire sont convergentes :

$$\sum (x_n + i.y_n) \text{ CV} \Leftrightarrow \sum x_n \text{ CV} \text{ et } \sum y_n \text{ CV.}$$

(D'après ce qui précède on a  $\Leftarrow$ , mais dans l'autre sens, et en considérant la contraposée, il faudrait faire la démonstration quand  $\sum x_n$  et  $\sum y_n$  divergent tous deux).

- *Remarque* : Lorsque  $\sum (u_n + v_n)$  et  $\sum v_n$  convergent, alors  $\sum u_n$  converge.

On peut sommer les éléments d'une série à termes positifs dans n'importe quel ordre.

On ne peut modifier l'ordre des termes d'une série quelconque que sur des termes « voisins » (avec des écarts d'indices ne tendant pas vers l'infini).

*Problème de l'ordre des termes* :  $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \dots = (1 - 1/2) - 1/4 (1/3 - 1/6) - 1/8 + \dots = 1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + \dots = (1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots)/2$  ; d'où  $\ln(2) = \ln(2)/2$  !!!

**b) Produit par un scalaire** : On ne change pas la nature d'une série en la multipliant par une constante non nulle (sous le signe somme car avec l'associativité on peut l'en sortir).

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Car, pour  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \cdot S_n = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . (*Remarque* :  $\sum 0 \cdot n = 0$ , mais  $0 \cdot \sum n$  est indéterminé).

#### 4) Théorèmes de majoration (ou minoration).

Une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées est convergente.

Une série à termes positifs majorée (ou dominée) par une série à termes positifs convergente est convergente.

Une série à termes positifs divergente diverge vers  $+\infty$ .

Une série minorée par (ou dominant) une série divergeant vers  $+\infty$  est divergente.

- *Règle de Riemann* : S'il existe  $\alpha > 1$  tel que  $n^\alpha u_n \rightarrow 0$  (ou tout autre réel), alors  $\sum u_n$  converge.

S'il existe  $\alpha \leq 1$  tel que  $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$  (ou tout autre réel non nul), alors  $\sum u_n$  diverge.

#### 5) Termes généraux équivalents. Utilisation des développements limités.

- *Proposition* : Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont strictement positives à partir d'un certain rang, et que  $u_n \sim v_n$  (quand  $n \rightarrow +\infty$ )<sup>vi</sup>, alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

*Corollaire* : Si  $f$  et  $g$  sont strictement positives pour  $x$  assez grand, et que  $f \sim g$  (quand  $x \rightarrow +\infty$ ), alors  $\sum f(n)$  et  $\sum g(n)$  sont de même nature. Il est alors possible d'utiliser des développements limités.

- *Preuve* : On suppose  $v_n$  positive à partir d'un certain rang ;  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  tel que  $n \geq N \Rightarrow |u_n/v_n - 1| < \varepsilon$ , c'est-à-dire, d'après l'hypothèse de positivité :  $(1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$ . On somme ensuite à partir de  $N$ , la fin est évidente en faisant tendre  $N$  vers l'infini.

- *Exemples* : •  $\sum \ln(1 + 1/n)$ . On peut en outre utiliser cette série pour donner une troisième démonstration de la divergence de la série harmonique, en utilisant  $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$  dans les sommes partielles (sorte de télescopage).

• Soit  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$  ; on pose  $v_n = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})$ . Alors :  $u_n = \sum_{k=1}^n v_k$  ; l'étude de la limite de la suite  $(u_n)$  est identique à la recherche de la somme de la série  $\sum v_n$ . Et comme  $v_n = \frac{-1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ , alors la suite  $(u_n)$  converge.

- *Remarque* : Si la suite est alternée, il est possible d'utiliser les développements limités, par exemple dans le cas suivant : Si  $u_n = (-1)^n \cdot \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$  où  $a$  et  $b$  sont des réels strictement positifs, alors :  $\sum u_n$  converge :

Soit  $v_n = u_n - (-1)^n \cdot \frac{a}{n}$  et  $w_n = (-1)^n \cdot \frac{a}{n}$  ; alors :  $v_n = \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ , comme c'est nécessairement positif à partir d'un certain rang, on peut appliquer le théorème à  $\sum v_n$  et en déduire sa convergence ( $\sum \frac{b}{n^2} = \frac{b \cdot \pi^2}{6}$ ). En outre :  $\sum w_n$  converge ( $= -a \cdot \ln(2)$ ) ; on en déduit que  $\sum u_n = \sum (v_n + w_n)$  converge.

## 6) Télescopage. Critère de d'Alembert. Critère spécial des séries alternées.

Le télescopage (appelé aussi : sommation en dominos) obéit à des règles très précises ; par exemple :

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

- *Exemple* : Si  $s$  est la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n^2 - 1}$  (on écrit :  $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1})$ ).

• On appelle *série lacunaire* une série dont le terme général s'annule une infinité de fois. Le critère de d'Alembert<sup>3</sup> ne peut pas s'appliquer à ce type de séries (sauf si les termes non nuls possèdent des indices en progression arithmétique, auquel cas on l'applique à une suite extraite).

**Critère de d'Alembert** :  
On ne peut pas conclure si cette limite vaut 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

- *Preuve* : On suppose que tous les termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang (*le cas des termes qui changent de signe est traité au paragraphe 8*). Si la limite de cette expression est strictement inférieure à 1, ça signifie qu'il existe un rang  $N$  à partir duquel tous les rapports  $u_{n+1}/u_n$  sont strictement inférieurs à 1. Il existe alors un réel  $q$  tel que :  $N \leq n \Rightarrow 0 \leq u_{n+1}/u_n \leq q < 1$ . Alors :

$$u_N + u_{N+1} + \dots + u_{N+n} \leq u_N(1 + q + q^2 + \dots + q^n), \text{ qui converge.}$$

La preuve est la même si tous les termes sont négatifs à partir d'un certain rang. Si les termes ne sont pas de signe constant, dans le cas de la convergence on montre alors que la série est absolument convergente et on utilise le théorème adéquat cité au §8).

Pour la divergence on procède de la même façon au début, mais il n'y a pas besoin de faire les sommes : on arrive à  $q^n |u_N| \leq |u_{N+n}|$  et il s'en suit que le terme général ne peut pas tendre vers 0. Par suite, cette démonstration est valide avec des termes de signe quelconque.

On fait une démonstration analogue si la limite est infinie.

- *Remarque* : On peut quelquefois appliquer le principe de ce théorème avant même de passer à la limite : S'il existe un réel  $q$  tel que pour tout  $n$  à partir d'un certain rang :  $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1$ , alors la série de terme général  $u_n$  converge. (Il s'agit dans ce cas du théorème de comparaison avec une série géométrique ; on peut aussi l'appliquer du côté divergent).

<sup>3</sup> Jean le Rond d'Alembert : 1717-1783.

- *Exercice* : Soit les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ; montrer que s'il existe un rang  $N$  à partir duquel, pour  $n \geq N$  :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \text{ alors } (\sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}) \text{ et } (\sum u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge}).$$

$(\frac{u_{N+1}}{u_N} \cdot \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \dots \frac{u_{N+n}}{u_{N+n-1}} \leq \dots)$ . Ce résultat peut raccourcir la démonstration du critère de d'Alembert.

**Critère spécial des séries alternées** (critère de Leibniz<sup>4</sup>) : Si  $(u_n)$  est positive, décroissante et converge vers 0, alors  $\sum (-1)^n u_n$  converge.

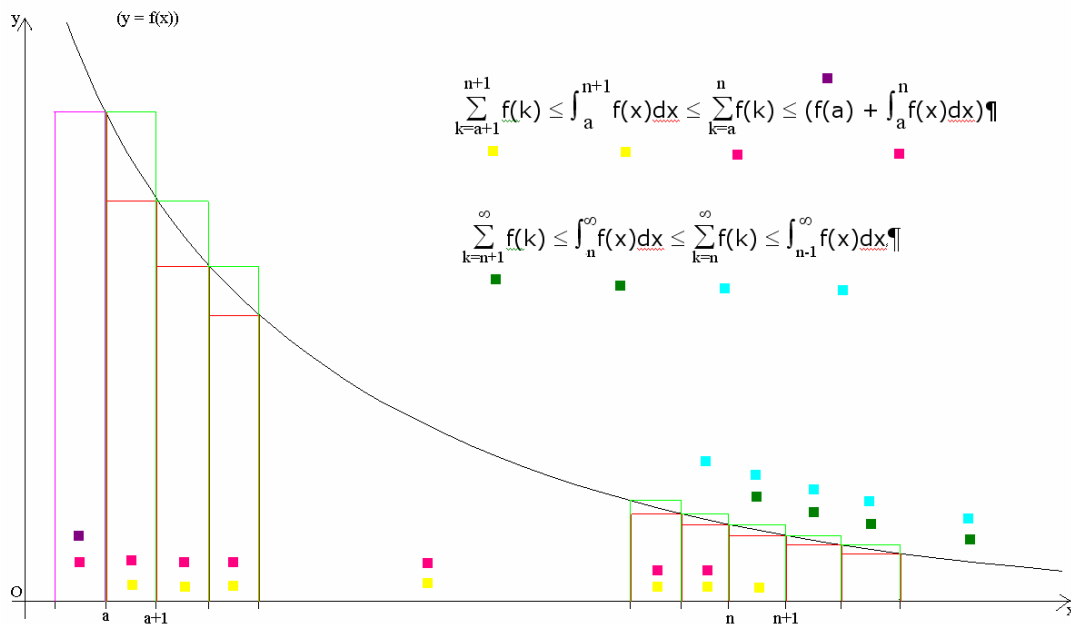
- *Preuve* : Soit  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$  ; les deux sous-suites des termes de rangs pairs et impairs sont adjacentes. En effet, la sous-suite des termes de rangs pairs est décroissante :  $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} < 0$ , tandis que la suite extraite des termes de rangs impairs est croissante :  $S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n+1} > 0$  ; en outre, la différence des deux tend vers 0 car :  $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$ .

Et comme  $S_{2n+1} \leq S_{2n}$ , les deux sous-suites (ou suites extraites) sont adjacentes et admettent une limite finie commune qui, par conséquent, est la limite de la suite  $S_n$ , donc : la somme de la série.

- *Exemple* : La série harmonique alternée.

- *Remarque* : Il est possible de transformer une telle série en une série de termes positifs en regroupant les termes par deux :  $(-1)^{2n} u_{2n} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n} - u_{2n+1} \geq 0$ .

7) Comparaison à une intégrale.



$a$  est un entier naturel,  $f$  est une fonction définie, continue, décroissante et positive sur  $[a, +\infty[$ . (On fait les démonstrations avec le même schéma que les séries de Riemann).

**Proposition (Théorème de Cauchy<sup>5</sup>)** :  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  et  $\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$  sont de même nature ( $a \in \mathbb{N}$ ).

Avec : $\sum_{k=a+1}^{n+1} f(k) \leq \int_a^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=a}^n f(k) \leq (f(a) + \int_a^n f(x) dx)$ ; et :	$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \leq \int_{n-1}^{\infty} f(x) dx$ .
---	--

<sup>4</sup> Gottfried Wilhelm Leibniz : 1646-1716.  
<sup>5</sup> Augustin-Louis Cauchy : 1789-1857.

## 8) Séries absolument convergentes.

$\sum u_n$  est absolument convergente si et seulement si  $\sum |u_n|$  est convergente (vrai dans  $\mathbb{C}$ ).

Proposition : Toute série absolument convergente est convergente.

- *Preuve* : Dans le cas réel, soit :  $\sum |u_n|$  CV, et :  $v_n = \{u_n \text{ si } u_n \geq 0, 0 \text{ sinon}\}$ ,  $w_n = \{-u_n \text{ si } u_n < 0, 0 \text{ sinon}\}$ . Alors :  $\sum |u_n| = \sum v_n + \sum w_n$ , ces dernières séries, à termes positifs, convergent donc. Il en est alors de même de  $\sum u_n = \sum v_n - \sum w_n$ .

Dans le cas complexe :  $u_n = x_n + iy_n$ . Alors, la série de terme général  $|u_n|$  est majorante des séries de termes généraux respectifs  $|x_n|$  et  $|y_n|$ , ce qui implique que les séries de termes généraux respectifs  $x_n$  et  $y_n$  sont absolument convergentes, ce qui implique à son tour la convergence de la série de terme général  $u_n$ . (En outre, une série absolument convergente est sommable).

- *Exemple* : la série de terme général  $u_n = e^{in\theta}/n^2$  est absolument convergente donc convergente.

Définition : Une série convergente mais non absolument convergente est dite « semi-convergente » ; c'est le cas par exemple de la série harmonique alternée.

- *Exemple* : La série de terme général  $u_n = (-1)^n/n^\alpha$  est absolument convergente si  $\alpha > 1$ , et semi-convergente si  $0 < \alpha \leq 1$  (et grossièrement divergente sinon).

- *Remarques* : Avec ce type de séries, les deux suites peuvent être équivalentes sans que les séries associées soient de même nature ; exemple :  $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$  et  $v_n = (-1)^n/(\sqrt{n} + (-1)^n)$  (la première est convergente mais pas la seconde (avec un DL d'ordre 1, conformément à la dernière remarque du chapitre) ; en outre la valeur absolue de son terme général n'est pas décroissante, elle est égale à  $1/(1-n) + (-1)^n\sqrt{n/(n-1)}$ ).

• Ce théorème permet de compléter la démonstration du critère de d'Alembert dans le cas de la convergence. On constate au passage que les séries convergeant pour le critère de d'Alembert sont absolument convergentes.

## 9) Étude du reste d'une série alternée, majoration et minoration.

Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de termes positifs, telle que la série  $\sum (-1)^n u_n$  converge (d'après le théorème du paragraphe 2, on en déduit qu'on a bien  $u_n \rightarrow 0$ ). Alors :

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k ; \text{ et : } \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_{n+1} .$$

- *Preuve* : L'inégalité  $S_{2n+1} \leq s \leq S_{2n}$  est une conséquence directe de l'adjacence des deux sous-suites de rangs pairs et impairs. Par suite :  $0 \geq R_{2n} = s - S_{2n} \geq S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}$ , et  $0 \leq R_{2n-1} = s - S_{2n-1} \leq S_{2n} - S_{2n-1} = u_{2n}$ .

(Remarque :  $S_{2n+1} \leq s \leq S_{2n}$  pour tout  $n \Rightarrow S_{2n+1} \leq s \leq S_{2n+2}$  ; la largeur de la première inégalité est  $u_{2n+1}$ , celle de la seconde  $u_{2n+2}$ ).

- *Exemple* : La série de terme général  $(-1)^n/\sqrt{n}$  est convergente et on peut majorer le reste et connaître son signe :  $R_n$  est du signe de  $(-1)^{n+1}$  et  $|R_n| < 1/\sqrt{n+1}$ .

## 10) Compléments.

- *Exemple important* : Soit  $\theta \notin 2k\pi\mathbb{Z}$  ; alors  $\sum_1^{\infty} e^{in\theta}/n^\alpha$  converge pour tout  $\alpha > 0$  (si  $\theta = \pi$  on retrouve la série harmonique alternée). Cette série diverge pour  $\alpha = 0$  de façon évidente si on considère l'expression de  $\sum \cos(k\theta)$  donnée au début.

Plus généralement, si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive décroissante et tend vers 0, alors :  $\sum_1^{\infty} a_n \cdot e^{in\theta}$  converge.

- *Preuve* : Soit  $S_n = \sum_{k=0}^n e^{i\theta k}$ . On a :  $\sum_{k=1}^n a_k \cdot e^{i\theta k} = \sum_{k=1}^n a_k \cdot (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot S_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \cdot S_k = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n \cdot S_n - a_1$  (transformation d'Abel). On considère maintenant la série de terme général  $v_n = (a_n - a_{n+1}) \cdot S_n$ , dont on va montrer qu'elle est absolument convergente :

Comme  $S_n = (1 - e^{i(n+1)\theta}) / (1 - e^{i\theta})$ , alors  $|S_n| \leq 2 / |1 - e^{i\theta}| = 1 / |\sin(\theta/2)|$  ; d'où :

$$\sum_{k=1}^{n-1} |(a_n - a_{n+1}) S_k| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (a_n - a_{n+1}) / |\sin(\theta/2)| = (a_1 - a_n) / |\sin(\theta/2)| \leq a_1 / |\sin(\theta/2)|.$$

La série de terme général  $|v_n|$  est à termes positifs et majorée donc convergente, d'où il résulte que la série de terme général  $v_n$  converge vers une somme  $\sigma$ .

Finalement :  $\sum_{k=1}^n a_k \cdot e^{i\theta k} = \sum_{k=1}^{n-1} v_k + a_n \cdot S_n - a_1$ , d'où l'on déduit :  $\sum_1^\infty a_n \cdot e^{i\theta n} = \sigma - a_1$ . La série converge bien.

- *Notations de Landau*<sup>6</sup> : On se place au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , et on écrit  $x \approx x_0$  pour signifier que  $x$  appartient à un voisinage de  $x_0$  s'il est réel, ou que  $|x|$  est très grand sinon. Alors :

$$g = O(f) \Leftrightarrow g \text{ est dominée par } f \Leftrightarrow \exists k \in ]0, +\infty[, (x \approx x_0 \Rightarrow |g(x)| \leq k \cdot |f(x)|).$$

*Exemple* :  $E(x) = x + O(1)$  ( $0 \leq x - E(x) < 1 \Rightarrow x - E(x) = O(1)$ ).

$$g = o(f) \Leftrightarrow g \text{ est négligeable devant } f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)/f(x) = 0 \Leftrightarrow g \ll f \text{ (notation de Hardy)}.^7$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe une fonction } \varepsilon \text{ telle que : } g(x) = \varepsilon(x) \cdot f(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

*Écriture* : L'égalité de deux  $o$  ou deux  $O$  n'est pas un signe égal conventionnel, c'est plutôt une équivalence :

$$o(f) = o(g) \text{ signifie : } h = o(f) \Leftrightarrow h = o(g).$$

*Conséquence* :  $o(f) = f \cdot o(1)$  (car  $g = f \cdot o(1) \Leftrightarrow \exists$  une fonction  $\varepsilon$  telle que  $g(x) = f(x) \cdot \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ ).

*Cas particulier* :  $f = o(x^n) \Leftrightarrow$  il existe une fonction  $\varepsilon$  telle que  $f(x) = x^n \cdot \varepsilon(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ .

*Proposition* :  $g = o(f) \Rightarrow g = O(f)$  (par définition de la limite, pour  $\varepsilon > 0$ , dans un voisinage convenable  $x \approx x_0 \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon \cdot |f(x)|$ ).

Pour  $m \leq n$ , au voisinage de  $0$  :  $f = o(x^n) \Rightarrow f = o(x^m)$  (car  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x^n = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x^m = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-m} \cdot f(x)/x^n = 0$ ).

*Produit* :  $\forall k \in \mathbb{R}^*$ ,  $k \cdot o(f) = o(k \cdot f) = o(f)$  ( $g = o(f) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)/f(x) = 0 \Leftrightarrow$ ).

Plus généralement :  $o(fg) = f \cdot o(g)$  (car  $o(fg) = fg \cdot o(1)$ ).

Cas particulier au voisinage de  $0$  :  $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$ , et si  $m \leq n$  :  $x^{-m} \cdot o(x^n) = o(x^{n-m})$ .

*Somme* : Il faut d'abord analyser le sens de l'écriture  $o(f) + o(g)$  ; toute fonction  $h = o(f) + o(g)$  est une somme  $h = h_1 + h_2$  avec  $h_1 = o(f)$  et  $h_2 = o(g)$ .

Au voisinage de  $0$  :  $m \leq n \Rightarrow o(x^m) + o(x^n) = o(x^m + x^n) = o(x^m)$  (car  $h_2 = o(x^n) \Rightarrow h_2 = o(x^m)$ ).

*Quotient* :  $\frac{1}{1 + o(x^n)} = 1 + o(x^n)$  (car  $\frac{1}{1 + o(x^n)} = \frac{1}{1 + x^n \cdot \varepsilon(x)} = 1 - x^n \cdot \varepsilon(x) + o(x^n \cdot \varepsilon(x)) = 1 + o(x^n) + o(o(x^n)) = 1 + o(x^n)$ ).

Si  $m \leq \inf\{n, p\}$ ,  $\frac{x^p}{x^m + o(x^n)} = x^{p-m} + o(x^{n+p-2m})$  (car  $\frac{x^p}{x^m + o(x^n)} = \frac{x^{p-m}}{1 + o(x^{n-m})} = x^{p-m} \cdot (1 + o(x^{n-m})) = x^{p-m} + o(x^{n+p-2m})$ ).

Si  $m \leq n$  et  $m \leq p \leq q$ ,  $\frac{x^p + o(x^q)}{x^m + o(x^n)} = x^{p-m} + o(x^{\inf\{q-m, n+p-2m\}})$  (car  $\frac{x^p + o(x^q)}{x^m + o(x^n)} = \frac{x^{p-m} + o(x^{q-m})}{1 + o(x^{n-m})} = (x^{p-m} + o(x^{q-m})) \cdot (1 + o(x^{n-m}))$ ).

*Dérivation* : Au voisinage de  $0$ , si  $f$  est de classe  $C^1$  avec  $f = o(x^n)$  et  $n \geq 1$ , alors :  $f' = o(x^{n-1})$ .

- *Preuve* : Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ ,  $n \geq 1$ , et  $f$  de classe  $C^1$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

( $f = o(x^n) \Rightarrow f = o(1)$  et  $f = o(x)$ ). Ainsi :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)/x}{x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^{n-1}} = 0$ .

<sup>6</sup> Edmund Georg Landau : 1877-1938. (À ne pas confondre avec Martin Landau ou Juliet Landau qui sont acteurs).

<sup>7</sup> Godefroy Harold Hardy : 1877-1947.

- *Équivalence* :  $f \sim g \Leftrightarrow f - g = o(g)$  ;  $f \sim g \Rightarrow f = O(g)$  et  $g = O(f)$  ;  $f \sim g \Rightarrow o(f) = o(g)$  et  $O(f) = O(g)$  ;  
 $F \sim G \Rightarrow F + f \sim G + f$  ;  $f \sim g$  et  $F \sim G \Rightarrow f.F \sim g.G$  ;  $F \sim G$  et  $f = o(F) \Rightarrow F + f \sim G$ .

- *Théorème de comparaison* :

$[u_n = o(v_n) \text{ ou } O(v_n)]$  et  $\sum v_n$  converge  $\Rightarrow \sum u_n$  converge.

$[u_n = o(v_n) \text{ ou } O(v_n)]$  et  $\sum u_n$  diverge  $\Rightarrow \sum v_n$  diverge.

- *Remarque* : Soit  $f(n) = 1/n\sqrt{n}$  ; alors  $f = o(1/n)$  et  $\sum f(n)$  converge. Soit  $f(n) = 1/n \cdot \ln(n)$  ; alors  $f = o(1/n)$  et  $\sum f(n)$  diverge (car  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln(x)} = +\infty$ , en posant  $u = \ln(x)$ ). On ne peut donc pas conclure en ce qui concerne  $\sum o(1/n)$  ; il conviendra donc de pousser les développements limités à un ordre strictement supérieur à un si on veut prouver la convergence d'une série par cette méthode (par contre, l'ordre un ne pose pas de problème si on veut prouver la divergence) ; car on est sûr que, pour  $\alpha > 1$  :  $\sum o(1/n^\alpha)$  converge, bien qu'on évite cette écriture car « petit o » ne désigne pas des nombres mais des équivalents. Sinon, on pourrait écrire :  $\alpha > 1 \Rightarrow \sum o(1/n^\alpha) = O(1)$ .

<sup>i</sup> Un corps est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication stables dans cet ensemble. L'addition doit être commutative, associative, posséder un élément neutre noté 0, et tout élément de l'ensemble doit posséder un opposé. La multiplication doit être associative, posséder un élément neutre noté 1, et tout élément non nul doit posséder un inverse ; si elle est en plus commutative, on dit qu'on est dans un corps commutatif. La multiplication doit en outre être distributive par rapport à l'addition.

<sup>ii</sup> Une application est une relation d'un ensemble de départ dans un ensemble d'arrivée telle que tout élément de l'ensemble de départ possède une et une seule image dans l'ensemble d'arrivée. Cette notion est synonyme de celle de « fonction ». Autrefois on les distinguait en attribuant aux éléments de l'ensemble de départ d'une fonction : « au plus une image » ; ainsi, une fonction devenait une application dès lors qu'on considérait sa restriction à son ensemble de définition (qui, à ce moment là, s'appelait : domaine de définition).

<sup>iii</sup> Synonyme de : « sous-ensemble ». L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté :  $\mathcal{P}(E)$ .

<sup>iv</sup> C'est comme lorsqu'on écrit : soit x tel que  $x^2 - 2x + 1 = 0$  ; à la fois x est une inconnue qu'il faut déterminer, et là c'est le nom « x » qui prime, et à la fois c'est le nombre 1.

<sup>v</sup> Un réel strictement positif a peut être élevé à une puissance complexe de la façon suivante :  $a^{x+iy} = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot (\cos(y \cdot \ln(a)) + i \cdot \sin(y \cdot \ln(a)))$  (où x et y sont des réels).

<sup>vi</sup>  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n/v_n = 1$  ; et surtout pas :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$ , car  $u_n = n + 1$  et  $v_n = n + 2$  ne seraient plus équivalentes, tandis que  $u_n = 1/n$  et  $v_n = 1/n^2$  le seraient.