

B) Séries entières.

On se place dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1) Formules de Taylor et développements limités.

Le polynôme de Taylor¹ de degré n en a existe si f est n fois dérivable en a : $P_a(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a)$.
Ensuite les hypothèses changent selon la nature du reste.

Formule de Taylor-Lagrange (hors programme) : f de classe C^n sur $[a, b]$, $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[\Rightarrow$

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que : } f(b) = P_a(b) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c). \quad (n=0 : \text{théorème des accroissements finis}).$$

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c) \text{ est le reste de Lagrange}^2.$$

- *Preuve* : Soit $\phi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - A \cdot \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$, A étant tel que $\phi(a) = 0$.

($A = (f(a) - f(b) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)) / (b-a)^{n+1}$). Cette fonction est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $\phi'(x) = (b-x)^n (A - f^{(n+1)}(x)) / n!$, et vérifie $\phi(a) = \phi(b) = 0$. On a ainsi toutes les hypothèses du théorème de Rolle³ ; ainsi : $\exists c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$, c'est-à-dire : $f^{(n+1)}(c) = A$, d'où $\phi(a) = 0$ devient la formule souhaitée. (Remarque : la formule reste vraie pour $b < a$).

Formule de Mac-Laurin⁴ (hors programme) : f $n+1$ fois dérivable sur $] -a, a[$ ($a > 0$) \Rightarrow

$$\forall x \in] -a, a[, \exists \theta \in]0, 1[\text{ tel que : } f(x) = P_0(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta x).$$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta x) \text{ est toujours le reste de Lagrange.}$$

Formule de Young : Soit $r > 0$, f n fois dérivable sur $]a-r, a+r[\Rightarrow$

$$\forall x \in]a-r, a+r[, f(x) = P_a(x) + o((x-a)^n).$$

$o((x-a)^n)$ est le reste de Peano⁵ (avec la notation "petit o" de Landau).

Ou bien : $\forall x \in]a-r, a+r[, f(x) = P_a(x) + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

$$\frac{(x-a)^n}{n!} \cdot \varepsilon(x) \text{ est le reste de Young}^6.$$

Reste intégral : f de classe C^{n+1} sur $[a, b] \Rightarrow f(b) = P_a(b) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) dt$.

$$\left(\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) dt \text{ est le reste intégral (ou de Taylor-Laplace}^7 \right).$$

- *Preuve* : Soit $\phi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)$, qui est de classe C^1 sur $[a, b]$ avec $\phi(b) = 0$. Elle est donc égale à l'intégrale de sa dérivée : $\phi(a) - \phi(b) = \int_b^a \phi'(t) dt = \int_b^a -(b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt / n! = \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt / n!$.

- *Exemple* : $\exists c \in]0, x[$ (ou $]x, 0[$), $\exists \theta \in]0, 1[$, comme $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! / (1+x)^n$,

¹ Brook Taylor : 1685-1731.

² Joseph Louis (comte de) Lagrange : 1736-1813.

³ Michel Rolle : 1652-1719.

⁴ Colin Mac-Laurin : 1698-1746.

⁵ Giuseppe Peano : 1858-1932.

⁶ W. H. Young : 1862-1946.

⁷ Pierre Simon (marquis de) Laplace : 1749-1827.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(t-x)^n \cdot dt}{(1+t)^{n+1}}. \text{ (Dans la première ou la deuxième formule, le reste tend vers 0 si } x \in [0, 1].)$$

- *Remarque* : La formule avec reste intégral peut être dérivée :

$$\begin{aligned} \left(\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) dt \right)' &= \left(\int_a^x \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (-t)^{n-k} \cdot f^{(n+1)}(t) dt \right)' = \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \int_a^x (-t)^{n-k} \cdot f^{(n+1)}(t) dt \right)' = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} \int_a^x (-t)^{n-k} \cdot f^{(n+1)}(t) dt + \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot (-x)^{n-k} \cdot f^{(n+1)}(x) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} \int_a^x (-t)^{n-k} \cdot f^{(n+1)}(t) dt + \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \cdot x^n \cdot f^{(n+1)}(x) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} n x^{k-1} \int_a^x (-t)^{n-k} \cdot f^{(n+1)}(t) dt + \frac{1}{n!} (1+(-1)^n) \cdot x^n \cdot f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n-1!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot x^k \int_a^x (-t)^{n-1-k} \cdot f^{(n+1)}(t) dt = \\ &= \int_a^x \frac{1}{n-1!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot x^k \cdot (-t)^{n-1-k} \cdot f^{(n+1)}(t) dt = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{n-1!} \cdot f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

$$\text{Par suite : } f'(b) = P_a'(b) + \left(\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t) dt \right)' = P_a'(b) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n+1)}(t) dt.$$

- *Exercice* : Donner un développement limité d'ordre 2 de $1/(n+1)$ quand n tend vers $+\infty$.

(Réponse : $1/n - 1/n^2 + o(1/n^2)$).

• **Inégalité de Taylor-Lagrange**. Soit f une application de classe C^n de $[a, b]$ dans \mathbb{K} , $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$ où $f^{(n+1)}$ est majorée sur $]a, b[$. Soit M tel que : $\forall x \in]a, b[, |f^{(n+1)}(x)| \leq M$. Alors :

$$|f(b) - P_a(b)| = \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) \right| \leq M \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n=0 : \text{inégalité des accroissements finis}).$$

- *Preuve* : Elle est simple dans le cas où $f^{(n+1)}$ est continue car il suffit de majorer le reste intégral, mais devient plus difficile sans cette hypothèse. Il faut alors appliquer le théorème suivant : Si ϕ et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, g étant à valeurs dans \mathbb{R} , telles que : $\forall x \in]a, b[, |\phi'(x)| \leq g'(x)$, alors : $|\phi(b) - \phi(a)| \leq g(b) - g(a)$. On l'applique aux deux fonctions suivantes : $\phi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x)/k!$, et $g(x) = -M \cdot (b-x)^n / n!$.

2) Définition d'une série entière.

Une série entière est une série notée $f(z) = \sum a_n z^n$ si on est dans \mathbb{C} et $f(x) = \sum a_n x^n$ si on est dans \mathbb{R} .

Son ensemble de définition est le sous-ensemble sur lequel elle converge, on l'appelle domaine de convergence.

- *Remarque* : On peut appliquer les théorèmes des séries numériques, dès lors qu'on considère la variable comme un élément du corps. Entre autres :

- La suite $(a_n z^n)$ doit tendre vers 0 (en particulier si la série est obtenue à partir d'un développement limité, le reste doit tendre vers 0).

- Si z est tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} |z \cdot a_{n+1} / a_n| < 1$ alors la série converge.

- Avec une série lacunaire dont les termes nuls sont répartis régulièrement, il est quand même possible d'appliquer le critère de d'Alembert. Exemple : $\sum 2^n \cdot x_{2n}$ est telle que : $a_{2n} = 2^n$, $a_{2n+1} = 0$. Cependant, en posant $u_n = 2^n \cdot x^{2n}$, on obtient $|u_{n+1}/u_n| = 2x^2$; il s'en suit qu'elle converge pour $x \in]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$.

- Si z est tel que $|a_n z^n|$ est décroissante et tend vers 0, la série de terme général $(-1)^n |a_n z^n|$ est convergente.

- *Exemple* : Avec le critère ci-dessus, on peut montrer que $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{|x|^n}{n}$ converge pour $x \in [-1, 1]$; le critère de d'Alembert est plus intéressant car, en posant $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n|x|}{n+1} \rightarrow |x|$ (quand $n \rightarrow +\infty$). La série converge donc quand $|x| < 1$; et comme pour $x = 1$ c'est la série harmonique alternée, elle converge sur $]-1, 1]$. (On peut aussi appliquer le critère spécial des séries alternées sur $[0, 1]$).

3) Lemme d'Abel⁸.

Soit $r > 0$; $(|a_n|r^n)$ bornée $\Rightarrow \forall z$ tel que $|z| < r$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

- *Preuve* : Première forme du théorème ; soit z_0 un complexe tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée alors : Pour tout complexe z tel qu'on ait $|z| < |z_0|$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente. Soit M un majorant de $(a_n z_0^n)$; alors : $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot |z/z_0|^n \leq M q^n$, avec : $q = |z/z_0| < 1$. La série étant dominée par une série géométrique convergente, elle converge (absolument).

- *Autre forme* : Soit z_0 un complexe tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée ; alors, pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.

- *Preuve* : Soit M un majorant de $(a_n z_0^n)$; alors $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot |z/z_0|^n \leq M q^n$ avec $q = |z/z_0| < 1$. La série étant dominée par une série géométrique convergente, elle converge (absolument).

4) Différentes définitions du rayon de convergence (dont celle qui vient du critère de d'Alembert).

$R = \sup\{r \geq 0, (|a_n|r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée}\} = \sup\{r \geq 0, \exists n_0 \text{ tel que } \sum_{n_0}^{\infty} |a_n|r^n \text{ converge}\} = \sup\{r \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|r^n = 0\}$.

- *Preuves* : Soit $I = \{r \geq 0 / |a_n|r^n \text{ est bornée}\}$, $J = \{r \geq 0 / \sum |a_n|r^n \text{ converge}\}$, $K = \{r \geq 0 / \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|r^n = 0\}$.

Si $(|a_n|r^n)$ est bornée alors pour tout $r' \leq r$, $(|a_n|r'^n)$ est bornée ; I est donc un intervalle, de la forme $[0, R[$ ou $[0, R]$, avec $R = \sup(I)$.

Si $\sum |a_n|r^n$ converge alors pour tout $r' \leq r$, $\sum |a_n|r'^n$ converge (même démonstration que le lemme d'Abel) ; J est donc de la forme $[0, R'[$ ou $[0, R']$, avec $R' = \sup(J)$.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|r^n = 0$ alors pour tout $r' \leq r$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|r'^n = 0$; K est de la forme $[0, R''[$ ou $[0, R'']$, avec $R'' = \sup(K)$.

Comme : $\sum |a_n|r^n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|r^n = 0 \Rightarrow |a_n|r^n$ bornée, alors : $J \subset K \subset I$, donc : $R' \leq R'' \leq R$.

Si $r < R$ alors il existe r' tel que $r < r' < R$, donc $|a_n|r'^n$ est bornée donc, d'après le lemme d'Abel, $\sum |a_n|r^n$ converge. Il en résulte que : $[0, R[\subset J$, donc : $R \leq R'$.

On a donc : $R \leq R' \leq R'' \leq R \Rightarrow R = R' = R''$.

- *Corollaire du critère de d'Alembert* :

Si cette limite existe :
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

(Attention : fraction inverse du critère de d'Alembert. La série peut avoir un rayon de convergence sans que cette limite existe ; c'est le cas, par exemple, des séries *lacunaires*, pour lesquelles une infinité de coefficients a_n sont nuls).

- *Preuve* : On traite la série comme une série numérique, avec $u_n = a_n \cdot x^n$; alors : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x|$. Donc : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$.

⁸ Niels Henrik Abel : 1802-1829.

- *Remarque* : lorsque $|a_n/a_{n+1}|$ n'a pas de limite, il est parfois possible de trouver quand même le rayon de convergence. Par exemple : $a_n = (2 + (-1)^n)n$; on a : $a_{2n}/a_{2n+1} \rightarrow 3$, tandis que : $a_{2n-1}/a_{2n} \rightarrow 1/3$. Mais, comme c'est une série à termes positifs, on peut la décomposer en somme de deux séries des termes de rangs pairs et des termes de rangs impairs, chacune ayant le rayon de convergence 1 (où : $\sum a_n z^n = (1+3z)z^2/(1-z^2)^2$).

- *Définition* : L'ensemble $D = \{z \in \mathbb{K} / |z| < R\}$ si $R \in]0, +\infty[$, $D = \emptyset$ si $R = 0$, $D = \mathbb{K}$ si $R = +\infty$, est appelé disque de convergence⁹ de la série de rayon de convergence R . Le disque de convergence est un ouvert inclu dans le domaine de convergence (dont on va voir au théorème suivant qu'il est inclus dans le disque fermé correspondant).

- *Remarque* : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ le disque de convergence est l'intervalle $] -R, R[$; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le disque de convergence est le disque ouvert du plan complexe de centre l'origine O et de rayon R (il ne contient pas sa frontière qui est le cercle de centre O et de rayon R). Dans les deux cas c'est un ouvert.

- *Théorème* : Si R est le rayon de convergence d'une série entière, elle converge dans son disque de convergence (pour tout $z \in D$, donc $|z| < R$), mais elle diverge grossièrement ($|a_n z^n|$ tend vers l'infini) si $|z| > R$. Il s'en suit que les points du domaine de convergence qui ne seraient pas dans le disque de convergence ne peuvent se trouver que sur sa frontière. (Preuve immédiate par définition de R).

- *Exemple* : $1/(1+x)$, $\ln(1+x)$ et $(1+x).\ln(1+x) - x$.

- *Théorème utile* : Si la suite (a_n) est bornée et ne converge pas vers 0, alors la série entière de terme général $a_n z^n$ a pour rayon de convergence : $R = 1$. Si la suite converge vers 0 alors le rayon de convergence : $R \geq 1$, et si elle tend vers $+\infty$ (en valeur absolue) alors $R \leq 1$.

- *Preuve* : Si la série ne converge pas vers 0 alors il existe une suite extraite (b_n) avec $b_n = a_{\phi(n)}$ (ϕ strictement croissante), et un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier naturel n : $|b_n| \geq \varepsilon$; il existe par ailleurs un majorant M à la suite (a_n) . Ainsi :

$$\sum_0^\infty \varepsilon |z|^{\phi(n)} \leq \sum_0^\infty |b_n| \cdot |z|^{\phi(n)} \leq \sum_0^\infty |a_n| \cdot |z|^n \leq \sum_0^\infty M |z|^n.$$

Le rayon de convergence étant 1 pour les deux extrémités de l'inégalité, il vaut 1 aussi au centre. (Pour $|z| < 1$, $\sum |z|^n$ CV $\Rightarrow \sum |z|^{\phi(n)}$ CV).

Si la suite converge vers 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|a_n| < \varepsilon$, donc : $\sum_{n_0}^\infty |a_n| \cdot |z|^n \leq \sum_{n_0}^\infty \varepsilon |z|^n$; comme le rayon de convergence du membre de droite est 1, celui du membre de gauche est au moins 1.

Si la suite tend vers $+\infty$, pour tout $M > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|a_n| \geq M$, donc : $\sum_{n_0}^\infty |a_n| \cdot |z|^n \geq \sum_{n_0}^\infty M |z|^n$; comme le rayon de convergence du membre de droite est 1, celui du membre de gauche est au plus 1.

- *Exemples* : $a_n = (2 + (-1)^n)$, $a_n = (2 + (-1)^n)n$.

- *Remarque* : S'il existe z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $R \geq |z_0|$. S'il existe z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leq |z_0|$.

5) Opérations sur les séries entières (somme, produit par un scalaire).

• *Produit par une constante* : Les séries de termes généraux $a_n z^n$ et $ka_n z^n$ (pour $k \in \mathbb{K}^*$) ont le même domaine de convergence (donc le même rayon de convergence).

k scalaire non nul $\Rightarrow \sum a_n z^n$ et $\sum ka_n z^n$ ont même rayon de convergence.

(On peut alors sortir la constante k du signe Σ).

⁹ Dans \mathbb{R} c'est un segment, mais il est normal de prendre un disque pour « dans \mathbb{C} ».

• **Somme** : Soit les deux séries de termes généraux $a_n z^n$ et $b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b . Soit R le rayon de convergence de la série de terme général $(a_n + b_n)z^n$:

Si $R_a \neq R_b$ alors $R = \inf\{R_a, R_b\}$.

Si $R_a = R_b$ alors $R \geq R_a = R_b$.

- **Preuve** : Dans le premier cas, il est évident que la série somme converge pour tout z tel que $|z| < \inf\{R_a, R_b\}$; il est de même évident qu'elle diverge si : $\inf\{R_a, R_b\} < |z| < \sup\{R_a, R_b\}$ car elle est somme d'une série divergente et d'une série convergente. Dans le second cas, où $R_a = R_b$, il reste évident que la série somme converge pour $|z| < R_a$. Par contre, il peut arriver que la série somme converge pour certains $|z| > R_a$; par exemple : $a_n = 1 + 2^n$ et $b_n = 1 - 2^n \Rightarrow R_a = R_b = 1/2, R = 1$.

Si $R_a \neq R_b$ alors la série diverge pour $|z| \geq \sup\{R_a, R_b\}$ (car le terme de la série ayant le plus petit rayon de convergence prend l'ascendant sur l'autre ; exemple : pour $z = 3, \Sigma(z/2)^n$ et $\Sigma(z/3)^n$). Lorsque $R_a = R_b$, on ne peut pas conclure.

En notant $RCV(\Sigma a_n z^n)$ le rayon de convergence de $\Sigma a_n z^n$: $RCV(\Sigma(a_n + b_n)z^n) \geq \inf\{RCV(\Sigma a_n z^n), RCV(\Sigma b_n z^n)\}$.

- **Égalité** : S'il existe $R > 0$ tel que $\forall x \in]-R, R[$ on ait $\sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty b_n x^n$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

En particulier, pour $R > 0$: $[\forall x \in]-R, R[, \sum_0^\infty a_n x^n = 0] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0]$.

6) Continuité, dérivabilité, intégration.

- **Lemme** : $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma n \cdot a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence (série dérivée).

- **Preuve** : $|a_n| r^n$ et $n|a_n| r^n$ ont la même limite nulle pour $r < R$ car $n|a_n| r^n = |a_n| (e^{\ln(n)/n} r)^n$ où $e^{\ln(n)/n}$ tend vers 1, donc :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $n \geq N \Rightarrow -\varepsilon < e^{\ln(n)/n} - 1 < \varepsilon$, donc : $0 < e^{\ln(n)/n} < 1 + \varepsilon$. On choisit ε tel que $r' = (1 + \varepsilon)r < R$.

Il en résulte que : $n|a_n| r^n = |a_n| r'^n$, qui admet bien une limite nulle.

- **Proposition** : Soit f la fonction définie par la série entière de terme général $a_n z^n$: $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, de rayon de convergence R . Elle est continueⁱⁱ, et même de classe C^∞ sur son disque ouvert de convergenceⁱⁱⁱ.

En outre, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que la série converge en R (respectivement $-R$), elle est alors continue en R (resp. $-R$).

- **Exemple** : En dérivant $\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n$, on obtient : $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_0^\infty (n+1)x^n$.

Plus généralement : $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(p)} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$, d'où l'on déduit : $\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^\infty \binom{n}{p} \cdot x^{n-p}$.

- **Remarque** : On ne dérive en général pas sur la frontière ; par exemple $\ln(2) = \sum_1^\infty (-1)^n / n$, mais $1/2 \neq \sum_0^\infty (-1)^n$.

Conséquences : $\Sigma a_n z^n$ est de classe C^∞ sur son disque de convergence.

Et si $R_n = \sum_{k=1}^\infty \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot z^k \rightarrow 0$:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n.$$

$\Sigma a_n z^n$ et $(k + \Sigma a_n z^{n+1} / (n+1))$ ont le même rayon de convergence, mais attention à la constante d'intégration (utiliser $F(0)$).

- *Exemple* : Sachant que $\frac{1}{1-x} = \sum_0^{\infty} x^n$ pour $|x| < 1$, alors $-\ln(1-x) = \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} + K$, K étant la constante d'intégration, qu'on obtient en calculant, par exemple, l'image de 0 : $-\ln(1-0) = K = 0$, d'où : $-\ln(1-x) = \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Si l'on s'en tient au théorème, cette formule est vraie pour $|x| < 1$; en réalité elle est vraie pour $-1 \leq x < 1$, mais la convergence pour $x = -1$ doit être l'objet d'une étude particulière (ici : grâce à la série harmonique alternée).

- *Remarque* : Une série entière est définie sur son disque de convergence, un intervalle si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; on parle de : « **point de vue global** ». Un développement limité est défini au voisinage d'un point ; on parle de : « **point de vue local** » du moins en ce qui concerne le reste de Young, le reste de Lagrange pouvant être considéré comme apportant lui aussi un point de vue global. Par exemple, soit $f(x) = \frac{1}{1+x}$; alors : $f(x) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$ si $|x| < 1$; et : $f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot x^k + R_n(x)$, le développement limité en 0 avec : $R_n(x) = \int_0^x (-1)^{n+1} (n+1)! \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+2}} dt$ ou $o(x^n)$ ou $(-1)^{n+1} (n+1)! / (1+c)^{n+2}$ (quand $0 < |c| < |x|$).

À l'ordre 1 : $f(x) = 1 - x + \sum_2^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = 1 - x + o(x) = 1 - x + 2/(1+c)^3 = 1 - x + \int_0^x \frac{2(x-t)}{(1+t)^3} dt$.

Pour $x = 1$, la première expression : $\sum_2^{\infty} (-1)^n$ n'existe pas ; dans la seconde expression on obtient dans ce cas particulier : $1/2 = o(1)$; dans la troisième expression on a ici : $1/2 = 2/(1+c)^3$, d'où $c = 4^{1/3} - 1$; enfin, la troisième expression se ramène à une trivialité : $1/2 = 1/2$. Le point de vue global est donc exclu, tandis qu'en restant d'un point de vue local, on obtient des résultats ayant un sens.

7) Séries entières usuelles (et leur domaine de convergence).

$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$	$\frac{1}{1+x} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$	$\frac{1}{1-x} = \sum_0^{\infty} x^n$	$ x < 1$
$\ln(1+x) = \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$	$\text{Arctan}(x) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	(Arctan converge en -1)	$-1 < x \leq 1$
$e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\text{ch}(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\text{sh}(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	pour tout x
$e^{ix} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} (1 + \frac{ix}{2n+1})$	$\cos(x) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\sin(x) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	pour tout x
$\text{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$			$ x < 1$
$\text{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$	$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$		$ x < \pi/2$

- *Remarque* : Ceux qui concernent les tangentes, trigonométriques ou hyperboliques, ne sont pas dans le B.O. concernant les TSI.

- *Preuve* : Tous ces développements en série peuvent s'obtenir, par exemple, avec la formule de Taylor, et en utilisant les différentes opérations. Il faut ensuite, pour ceux qui ont été obtenus par la formule de Taylor, vérifier leur validité. Prouvons, à titre d'exemple, celui de l'exponentielle : Soit $f(x) = e^x$; pour tout $t \in [-|x|, |x|]$, on a $|f^{(n+1)}(t)| \leq e^{|x|}$. D'où, en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange : $|e^x - \sum_{k=0}^n x^k/k!| \leq e^{|x|} \cdot x^{n+1}/(n+1)!$, ce qui a pour conséquence qu'on se trouve dans les conditions du théorème du §9.

8) Exponentielle complexe.

$$\exp(z) = e^z = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z/n)^n.$$

($\exp(z)$ est la notation fonctionnelle, e^z est la notation d'Euler).

Toutes les propriétés algébriques restent valables. À titre de curiosité, il est possible de définir un domaine sur lequel cette fonction est bijective et de définir son inverse qu'on appelle une *représentation* du logarithme complexe.^{iv}

- *Remarques* : • Pour tout complexe z : $e^z \neq 0$ (sinon : $\cos(y) + i.\sin(y) = 0$, d'où $\cos(y) = \sin(y) = 0$, ce qui est absurde). On a en outre une périodicité : $e^{z+2i\pi} = e^z$. Et pour tout complexe z , le conjugué de e^z est $e^{\bar{z}}$. Enfin : $(e^z)' = e^z$.

• *Puissance* : On peut définir la puissance complexe d'un réel strictement positif a : $a^z = e^{z.\ln(a)}$. On peut aussi élever un nombre complexe quelconque à une puissance entière (entier relatif), sauf 0 à une puissance négative (ou nulle) ; mais, par exemple, sachant que $i^2 = (-i)^2 = -1$, lequel entre i et $-i$ devrait-on choisir pour la puissance $1/2$ de -1 (il n'y a pas de notion de positif ou de négatif pour un imaginaire) ?^v

On peut calculer $e^{i\theta} = \sum_0^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$, où l'on sépare les termes de rangs pairs des termes de rangs impairs.

- *Exemple d'application à la frontière* : On considère $\ln(1 + e^{i\theta})$ et $-\ln(1 - e^{i\theta})$. On a :

$$1 + e^{i\theta} = 2.\cos(\theta/2).e^{i\theta/2} \quad \text{et} \quad 1 - e^{i\theta} = -2i.\sin(\theta/2).e^{i\theta/2} \quad (\text{dédit des formules d'Euler}).$$

Avec $\theta \neq (2k + 1)\pi$ pour la première et $\theta \neq 2k\pi$ pour la seconde (où $k \in \mathbb{Z}$).

$$\text{Si } \theta \in](4k - 1)\pi, (4k + 1)\pi[, \text{ on écrit } 1 + e^{i\theta} = 2.\cos(\theta/2).e^{i\theta/2}.$$

$$\text{Si } \theta \in](4k + 1)\pi, (4k + 3)\pi[, \text{ on écrit } 1 + e^{i\theta} = -2.\cos(\theta/2).e^{i(\pi + \theta/2)}.$$

$$\text{Si } \theta \in](4k - 2)\pi, 4k\pi[, \text{ on écrit } 1 - e^{i\theta} = -2.\sin(\theta/2).e^{i(\theta + \pi/2)}.$$

$$\text{Si } \theta \in]4k\pi, (4k + 2)\pi[, \text{ on écrit } 1 - e^{i\theta} = 2.\sin(\theta/2).e^{i(\theta - \pi/2)}.$$

Il y a ensuite un problème de détermination du logarithme qu'il faut régler au cas par cas (on rappelle que la convergence de $(\sum e^{in\theta}/n)$ a été établie au chapitre précédent) :

$$\text{Si } \theta \in](4k - 1)\pi, (4k + 1)\pi[, \quad \ln(1 + e^{i\theta}) = \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\cos(n\theta)}{n} + i \cdot \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin(n\theta)}{n} = \ln(2.\cos(\theta/2)) + i.(\theta - 4k\pi)/2.$$

Car la somme concernant les sinus poserait un problème si on ne retirait pas les $4k\pi$ (par exemple, pour $\theta = 4k\pi$).

$$\text{Si } \theta \in](4k + 1)\pi, (4k + 3)\pi[, \quad \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\cos(n\theta)}{n} + i \cdot \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin(n\theta)}{n} = \ln(-2.\cos(\theta/2)) + i.(\theta - (4k + 2)\pi)/2.$$

(Par exemple, pour $\theta = (4k + 2)\pi$).

$$\text{Si } \theta \in](4k - 2)\pi, 4k\pi[, \quad -\ln(1 - e^{i\theta}) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} + i \cdot \sum_1^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = -\ln(-2.\sin(\theta/2)) - i.(\theta - (4k - 1)\pi)/2.$$

(Par exemple, pour $\theta = (4k - 1)\pi$).

$$\text{Si } \theta \in]4k\pi, (4k + 2)\pi[, \quad -\ln(1 - e^{i\theta}) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} + i \cdot \sum_1^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = -\ln(2.\sin(\theta/2)) - i.(\theta - (4k + 1)\pi)/2.$$

(Par exemple, pour $\theta = (4k + 1)\pi$).

On peut aussi remarquer que, par exemple, si $\theta + \pi \in](4k + 1)\pi, (4k + 3)\pi[$, alors $\theta \in]4k\pi, (4k + 2)\pi[$; ainsi :

$$\ln(1 + e^{i(\theta + \pi)}) = \ln(1 - e^{i\theta}), \quad \text{avec} : \quad \ln(1 + e^{i(\theta + \pi)}) = \ln(-2.\cos((\theta + \pi)/2)) + i.((\theta + \pi) - (4k + 2)\pi)/2, \quad \text{et} :$$

$$\ln(1 - e^{i\theta}) = \ln(2.\sin(\theta/2)) + i.(\theta - (4k + 1)\pi)/2.$$

On constate qu'il y a bien égalité entre les deux expressions.

- *Autre représentation* : On peut aussi définir l'exponentielle complexe comme la limite^{vi}, pour $z \in \mathbb{C}$ donné, de la suite $((1 + z/n)^n)$: $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z/n)^n$.

9) Fonction développable en série entière.

- *Définition* : Une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement s'il existe un intervalle I contenant 0 et au moins un autre réel non nul, ainsi qu'une suite de réels (a_n) tels que pour tout élément x de I : $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$.

- *Théorème (hors programme)* : La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si on a les deux conditions suivantes :

$\exists R > 0$ tel que f est de classe C^∞ sur $I =]-R, R[$, et :

$\forall x \in I$, la suite $(u_n(x))$ définie par $u_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$ converge vers 0.

- *Conséquence*. Pour tout entier naturel n , on a pour $x \sim 0$: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^n)$.

- *Propriétés (hors programme)* : La somme et le produit de deux fonctions développables en séries entières est développable en série entière (le rayon de convergence de la somme ou du produit est supérieur ou égal au plus petit des deux rayons de convergence des séries de départ).

Les primitives ou la dérivée d'une fonction développable en série entière sont développables en série entière (avec le même rayon de convergence).

Si $f(x)$ est développable en série entière, avec pour rayon de convergence R , $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ est développable en série entière si $\alpha \neq 0$ et $|\beta| < R$ (le rayon de convergence est alors supérieur ou égal à $(R - |\beta|)/|\alpha|$).

10) Quelques exemples.

a) Étudier les séries entières $\sum a_n z^n$ pour $a_n = (2 + (-1)^n)$ puis $n \cdot (2 + (-1)^n)$. (Séparer les termes pairs et impairs, en remarquant que d'Alembert ne s'applique pas tel quel : $a_{2n}/a_{2n+1} \rightarrow 3$, tandis que : $a_{2n-1}/a_{2n} \rightarrow 1/3$).

b) Étude de $\text{Argth}(x)$. Il y a une première façon de retrouver la formule analytique, en inversant l'égalité suivante : $x = \text{th}(y) = \text{sh}(y)/\text{ch}(y) = (e^{2y} - 1)/(e^{2y} + 1)$, d'où $e^{2y} = (1+x)/(1-x)$, puis : $y = \frac{1}{2} \cdot \ln((1+x)/(1-x))$.

On peut aussi utiliser la dérivée, obtenu grâce à la formule $dy/dx = 1/(dx/dy)$, où l'on obtient après calcul : $\text{Argth}(x)' = 1/(1 - \text{th}^2 y) = 1/(1 - x^2) = \frac{1}{2} \cdot (1/(1-x) + 1/(1+x))$. Il suffit ensuite de l'intégrer (et d'utiliser $\text{Argth}(0) = 0$).

Le développement en série entière est aussi obtenu en intégrant celui de la dérivée qui est lié à $1/(1-X) = \sum X^n$.

Une troisième méthode utilise uniquement les séries entières suivantes (déjà données dans les méthodes précédentes) :

$$\text{Argth}(x) = \sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -\ln(1-x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n}, \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} \cdot \ln(1-x^2) = \sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{2n}.$$

On cherche ensuite un équivalent de $1 + 1/3 + 1/5 + \dots + 1/(2n-1)$ en se servant de l'équivalent de la série harmonique : $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/2n \sim \gamma + \ln(2) + \ln(n)$, où $\gamma \approx 0.577215664901533$ est la constante d'Euler.

On obtient en effet la somme souhaitée sous la forme : $1 + 1/3 + 1/5 + \dots + 1/(2n-1) + \frac{1}{2} \cdot (1 + 1/2 + \dots + 1/n)$. (On peut aussi utiliser la somme de la série harmonique alternée).

c) Numération décimale illimitée. Soit un entier naturel $q \geq 2$ et une suite (a_n) d'entiers naturels à valeurs dans $[[0, q-1]] = [0, q-1] \cap \mathbb{Z}$. Montrer que la série $\sum a_n q^{-n}$ converge vers un réel de $[0, q]$, tout l'intervalle pouvant être obtenu ($\sum (1-q)q^{-n}$). Exemple : Déterminer cette somme pour $q = 10$, $a_{2n} = 3$ et $a_{2n+1} = 8$.

Soit $\lambda = \sum a_n q^{-n}$, et $f_\lambda(x) = \sum a_n x^n$. Donner le rayon de convergence de cette série. (Si on veut appliquer le théorème utile : Que signifie « converger vers 0 » pour la suite (a_n) ?) Calculer $f_\lambda(x)$ pour $q = 10$ et : ① $\lambda = 0,2368$; ② puis pour $\lambda = 2368/9999$.

Soit $q = 10$, $\lambda = \gamma$ (le nombre d'Euler), et la somme $f_\gamma(\frac{1}{3})$. Montrer qu'il existe une suite (b_n) à valeur dans $[[0, 2]]$ telle que l'on ait : $f_\gamma(\frac{1}{3}) = \sum b_n 3^{-n}$.

d) Équations différentielles. Soit (u_n) une suite croissante telle que : $u_0 \geq 2$.

① Soit la série entière associée : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{u_0 u_1 \dots u_n}$, minorer son rayon de convergence (d'Alembert).

② On suppose que pour tout n , $u_n \in \mathbb{N}$. Que signifie « être bornée » pour la suite (u_n) ? Montrer que l'on a : (u_n) bornée $\Leftrightarrow f(1)$ rationnel (la réciproque \Leftarrow est une question difficile. On montre par récurrence que si on met $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_k}$ sous forme de fraction irréductible, alors le dénominateur est un multiple de u_n . Il faut pour cela utiliser la propriété suivante : Si un entier naturel a divise un autre entier naturel b et le successeur d'un de ses multiples $kb + 1$, alors $a = 1$).

③ Soit la série entière : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, vérifiant l'équation différentielle : $f'(x) = \lambda f(x^p)$ où λ est un réel non nul et p un entier naturel non nul. Donner l'expression de f . Quel est son rayon de convergence ? (Si $p \neq 1$, soit la suite $u_n = \frac{p^n - 1}{p - 1}$, et si $p = 1$: $u_n = n + 1$. Alors $f(x) = a_0 \cdot (1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1} x^{u_n}}{u_0 u_1 \dots u_n})$).

④ Si $\lambda = 1$ et $a_0 \in \mathbb{Q}$, $f(1)$ est-il rationnel ?

⑤ Résoudre par cette méthode $f'(x) = -f(x^2)$. En remarquant que la fonction $(x \mapsto 1/x)$ est solution, est-elle pour autant développable en série entière ?

⑥ Étudier le cas où $p = 1$ et où λ est un réel non nul quelconque.

ⁱ Théorème de Rolle : Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$; alors : $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

ⁱⁱ Soit z_0 tel que $|z_0| < R$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la série de terme général $a_n z^n$ étant convergente sur son disque de convergence, pour tout z dans ce disque et pour $\varepsilon' = \varepsilon/2$, il existe un entier N tel que $n > N \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \varepsilon'$. Ensuite, la fonction $(z \mapsto z^n)$ étant continue partout, pour $\varepsilon'' = \inf\{1, R, \varepsilon/(2 \sum_{n=0}^N |a_n|)\}$, il existe un $\eta > 0$ tel que $|z - z_0| < \eta \Rightarrow |z^n - z_0^n| < \varepsilon''$. Ainsi :

$$|z - z_0| < \eta \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z^n - z_0^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \varepsilon'' = \sum_{n=0}^N |a_n| \cdot \varepsilon'' + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot \varepsilon'' \leq \left(\sum_{n=0}^N |a_n| \right) \varepsilon'' + \varepsilon' = \varepsilon.$$

Ceci prouve la continuité de la série entière.

ⁱⁱⁱ Soit z et h tels que $0 < |h|$ et $\sup\{|z|, |z+h|\} < R$ le rayon de convergence. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $\varepsilon' = \varepsilon/3$ et $\varepsilon'' = |h|\varepsilon/3$. Il existe alors N' tel que : $n > N' \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z|^{n-1} < \varepsilon'$, et N'' tel que : $n > N'' \Rightarrow \sup\{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z|^n, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |(z+h)^n|\} < \varepsilon''$; soit alors $N = \sup\{N', N''\}$. Ainsi : $|\sum_{n=0}^N (a_n \cdot ((z+h)^n - z^n)/h - n \cdot a_n z^{n-1})| \leq \sum_{n=0}^N |a_n \cdot ((z+h)^n - z^n)/h - n \cdot a_n z^{n-1}| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot |(z+h)^n|/|h| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot |z^n|/|h| + \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| \cdot |z|^{n-1} \leq |\sum_{n=0}^N (a_n \cdot ((z+h)^n - z^n)/h - n \cdot a_n z^{n-1})| + \varepsilon''/|h| + \varepsilon''/|h| + \varepsilon' = |\sum_{n=0}^N (a_n \cdot ((z+h)^n - z^n)/h - n \cdot a_n z^{n-1})| + \varepsilon$. Or, la limite quand h tend vers 0 de la première partie est nulle car on peut dériver une somme finie terme à terme. D'où : $\lim_{h \rightarrow 0} |\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot ((z+h)^n - z^n)/h - n \cdot a_n z^{n-1})| = 0$, ce qui prouve le théorème.

- Remarque 1 : Une démonstration aussi complexe est nécessaire car une somme infinie est une limite, et il est en général interdit d'intervir deux limites ; par exemple : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} nh = +\infty$, tandis que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0^+} nh = 0$.

- Remarque 2 : Si une fonction f de la variable réelle x admet la dérivée $f'(x)$, lorsqu'on la prolonge de façon convenable, par exemple avec l'expression de la série entière, sur l'ensemble des complexes en l'appliquant à la variable complexe z , elle admet la dérivée $f'(z)$. On démontre cette propriété grâce à la formule de composition : $(f \circ u)' = u' \cdot (f' \circ u)$, et la formule de la différentielle : $df = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial y)dy$. En effet : $\partial f(x+iy)/\partial x = (\partial(x+iy)/\partial x) \cdot f'(x+iy) = f'(x+iy)$, et $\partial f(x+iy)/\partial y = (\partial(x+iy)/\partial y) \cdot f'(x+iy) = i \cdot f'(x+iy)$; d'où : $df = f'(x+iy)(dx + i \cdot dy) = f'(z)dz$, c'est-à-dire : $df(z)/dz = f'(z)$.

^{iv} Démonstration hors programme : Soit $e^a \cdot e^b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b^p}{p!} = (1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3!} + \dots)(1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3!} + \dots)$; comme ces séries sont absolument convergentes, on peut réorganiser l'ordre des termes :

$$e^a \cdot e^b = 1 + (a+b) + \left(\frac{a^2}{2!} + \frac{a \cdot b}{1!1!} + \frac{b^2}{2!}\right) + \dots + \left(\frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n-1} \cdot b}{(n-1)!1!} + \dots + \frac{a \cdot b^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{b^n}{n!}\right) + \dots \text{ (produit de Cauchy)}$$

$$e^a \cdot e^b = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^m \frac{a^p b^{m-p}}{p!(m-p)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m \frac{m!}{p!(m-p)!} a^p b^{m-p} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} a^p b^{m-p} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (a+b)^m = e^{a+b}.$$

Démonstration plus rigoureuse : On suppose n assez grand, et on fait le produit des deux sommes $(\sum_{k=0}^n z^k/k!) (\sum_{k=0}^n z^k/k!)$; le terme de degré m , pour $m \leq n$ est égal à la somme : $\sum_{k=0}^m z^k z^{m-k}/k!(m-k)! = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^k z^{m-k}/m! = (z+z')^m/m!$. Ainsi : $\exp(z) \cdot \exp(z') = \sum_{k=0}^n (z+z')^k/k! + R_n(z, z')$ (un certain reste où le degré des monômes est strictement supérieurs à n). Le développement en série entière de $\exp(z) \cdot \exp(z')$ coïncide donc avec celui de $\exp(z+z')$ pour tout entier naturel n car la série de terme général $(z+z')^n/n!$ est convergente. Il s'en suit que ces deux séries sont

égales car $R_n(z, z')$ tend vers 0, compte tenu du fait qu'il contient moins de termes que le reste de la série de terme général $(z + z')^n/n!$ qui est absolument convergente.

Il existe une autre démonstration, plus simple, qui utilise la propriété de dérivation exposée dans la remarque 2 de la note 8, et le développement en série entière au voisinage d'un autre point que 0. Alors : $\exp(z + z') = \sum_0^{\infty} f^n(z)z'^n/n!$, et comme $f^n(z) = \exp(z)$, on obtient le

résultat : $\exp(z + z') = \sum_0^{\infty} \exp(z)z'^n/n! = \exp(z)\sum_0^{\infty} z'^n/n! = \exp(z)\exp(z')$.

^v La formule $(e^z)^z = e^{zz}$ est donc interdite, $(e^z)^z$ n'ayant pas de sens. Il faut toutefois remarquer qu'il fut un temps où l'on notait $\sqrt{-1}$ à la place de i ; certaines calculatrices continuent d'accepter cette notation.

^{vi} Quand n assez grand, pour $z = x + iy$, $\ln|u_n| = \ln(1 + 2x/n + (x^2 + y^2)/n^2).n/2 \sim (2x/n + (x^2 + y^2)/n^2).n/2$, d'où : $\ln|u_n| \rightarrow x$, c'est-à-dire : $|u_n| \rightarrow e^x$. Par ailleurs : $\tan(\arg(u_n^{1/n})) = y/(n + x)$, et comme $\arg(u_n^{1/n}) \in]-\pi/2, \pi/2[$, alors : $\arg(u_n^{1/n}) \sim \tan(\arg(u_n^{1/n})) \sim y/n$; d'où finalement : $\arg(u_n) \rightarrow y$. On a ainsi trouvé que la limite de (u_n) était égale à : $e^x(\cos(y) + i.\sin(y)) = e^z$.