B) Fiche : Séries entières.

1) Formules de Taylor et développements limités.

Formule de Taylor-Young : Soit $r > 0$, f n fois dérivable sur $]a - r, a + r[$ $\Rightarrow$

$$\forall x \in]a - r, a + r[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - a)^k}{k!}.f^{(k)}(a) + o((x - a)^n).$$

Reste intégral : f de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ $\Rightarrow$ $f(b) = P_a(b) + \int_a^b \frac{(b - t)^n}{n!}.f^{(n+1)}(t)dt$.

2) Définition d'une série entière.

Une série entière est une série notée $f(z) = \Sigma a_n z^n$ si on est dans $\mathbb{C}$ et $f(x) = \Sigma a_n x^n$ si on est dans $\mathbb{R}$.

Son ensemble de départ est le sous-ensemble sur lequel elle converge, on l'appelle domaine de convergence.

3) Lemme d'Abel.

Soit $r > 0$; $(|a_n|r^n)$ bornée $\Rightarrow$ $\forall z$ tel que $|z| < r$, $\Sigma a_n z^n$ est absolument convergente.

4) Différentes définitions du rayon de convergence (dont celle qui vient du critère de d'Alembert).

$R = \sup\{r \geq 0,\ (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\} = \sup\{r \geq 0,\ \exists\, n_0 \text{ tel que } \sum_{n_0}^{\infty}|a_n|r^n \text{ converge}\} = \sup\{r \geq 0,\ \lim_{n\to\infty} |a_n|r^n = 0\}$.

Si cette limite existe : $\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.}$

Le disque ouvert de centre 0 et de rayon R est le disque de convergence (il est inclus dans le domaine de convergence).

- *Théorème utile* : Si la suite (a_n) est bornée et ne converge pas vers 0, alors la série entière de terme général $a_n z^n$ a pour rayon de convergence : $R = 1$. Si la suite converge vers 0 alors le rayon de convergence : $R \geq 1$, et si elle tend vers $+\infty$ (en valeur absolue) alors $R \leq 1$.

5) Opérations sur les séries entières (somme, produit par un scalaire).

k scalaire non nul $\Rightarrow$ $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma k a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

En notant $RCV(\Sigma a_n z^n)$ le rayon de convergence de $\Sigma a_n z^n$: $RCV(\Sigma(a_n + b_n)z^n) \geq \inf\{RCV(\Sigma a_n z^n), RCV(\Sigma b_n z^n)\}$ (égalité si $RCV(\Sigma a_n z^n) \neq RCV(\Sigma b_n z^n)$).

6) Dérivabilité, intégration.

$\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma n.a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence (série dérivée).

Conséquences : $\Sigma a_n z^n$ est de classe C^∞ sur son disque de convergence.

Et si $R_n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.z^k \to 0$:

$$\boxed{f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.z^n.}$$

$\Sigma a_n z^n$ et $(k + \Sigma a_n z^{n+1}/(n + 1))$ ont le même rayon de convergence, mais attention à la constante d'intégration (utiliser $F(0)$).

7) Séries entières usuelles (et leur domaine de convergence).

$(1 + x)^\alpha = 1+\sum_1^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)...(\alpha - (n - 1))}{n!} x^n$	$\frac{1}{1 + x} = \sum_0^{\infty}(-1)^n.x^n$	$\frac{1}{1 - x} = \sum_0^{\infty} x^n$		$\lvert x\rvert < 1$
$\ln(1 + x) = \sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{x^n}{n}$	$\text{Arctan}(x) = \sum_0^{\infty}(-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	(Arctan converge en -1)		$-1 < x \leq 1$
$e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\text{ch}(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\text{sh}(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$		pour tout x
$e^{ix} = \sum_0^{\infty}(-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!}(1 + \frac{ix}{2n + 1})$	$\cos(x) = \sum_0^{\infty}(-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\sin(x) = \sum_0^{\infty}(-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$		pour tout x
$\text{Argth}(x) = \frac{1}{2}.\ln(\frac{1+x}{1-x}) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$				$\lvert x\rvert < 1$
$\text{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$	$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$			$\lvert x\rvert < \pi/2$

8) Exponentielle complexe.

$$\exp(z) = e^z = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} (1 + z/n)^n.$$

Toutes les propriétés algébriques restent valables. À titre de curiosité, il est possible de définir un domaine sur lequel cette fonction est bijective et de définir son inverse qu'on appelle une *représentation* du logarithme complexe.

Par exemple (à la frontière) : $\ln(1 + e^{i\theta}) = \sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{e^{in\theta}}{n} = \ln(2.\cos(\frac{\theta}{2})) + i.\frac{\theta}{2}$, où $\theta \in\ ]-\pi, \pi[$.

9) Fonction développable en série entière.

f est développable en série entière sur $]-R, R[$ si et seulement s'il existe une série entière de rayon de convergence R et égale à f sur $]-R, R[$.

- *Conséquence*. Pour tout entier naturel n on a pour $x \sim 0$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k + o(x^n)$.