

D) Espaces préhilbertiens réels.

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni de sa base canonique B (qui est inutilisable avec des espaces trop grands, comme celui des fonctions).

1) Définition et propriétés d'un produit scalaire.

Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire ϕ symétrique définie positive.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall (u_1, u_1', u_2, u_2') \in E^4$: (bilinéarité)

$\phi(\alpha \cdot u_1, u_2) = \phi(u_1, \alpha \cdot u_2) = \alpha \cdot \phi(u_1, u_2)$, $\phi(u_1 + u_1', u_2) = \phi(u_1, u_2) + \phi(u_1', u_2)$, $\phi(u_1, u_2 + u_2') = \phi(u_1, u_2) + \phi(u_1, u_2')$.

$\forall (u, v) \in E^2$: $\phi(u, v) = \phi(v, u)$ (symétrie).

$\forall u \in E$: $\phi(u, u) \geq 0$ (positive) ; et : $\phi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$ (définie).

- *Remarque* : $\forall u \in E$: $\phi(u, 0_E) = 0$ (car $\phi(u, u - u) = \phi(u, u) - \phi(u, u)$, ou bien $\phi(u, 0 \cdot v) = 0 \cdot \phi(u, v)$).

L'espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est un *espace préhilbertien*¹ réel. S'il est de dimension finie, c'est un *espace euclidien*². Notation simplifiée : $(u|v) = \ll u \text{ scalaire } v \gg$.

Il existe plusieurs façons de noter le produit scalaire : $u \cdot v$ (Capes 1991), $\langle u, v \rangle$ (Joseph Grifone, Algèbre linéaire), $(u|v)$ (Arnaudès, Fraysse, Algèbre bilinéaire et géométrie), (u, v) (Capes 1972), $\langle u|v \rangle$.

En dimension finie, un tel produit scalaire est défini dans la base canonique par une matrice symétrique de diagonale strictement positive :

$$M = \begin{pmatrix} \phi(e_1, e_1) & \phi(e_1, e_2) & \dots & \phi(e_1, e_n) \\ \phi(e_2, e_1) & \phi(e_2, e_2) & \dots & \phi(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(e_n, e_1) & \phi(e_n, e_2) & \dots & \phi(e_n, e_n) \end{pmatrix}. \text{ Avec la notation simplifiée : } M = \begin{pmatrix} (e_1|e_1) & (e_1|e_2) & \dots & (e_1|e_n) \\ (e_2|e_1) & (e_2|e_2) & \dots & (e_2|e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n|e_1) & (e_n|e_2) & \dots & (e_n|e_n) \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est appelée matrice de Gram³ de la famille (e_1, e_2, \dots, e_n) et notée $G(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Le produit scalaire de deux vecteurs s'exprime alors dans cette base par un produit matriciel : $(u|v) = {}^t u_B M v_B$.

- *Proposition* : Si M est une matrice symétrique définie positive, alors il existe une matrice inversible T telle que $M = {}^t T T$. Alors : ${}^t u_B M v_B = {}^t (T u_B) (T v_B)$. (La démonstration est équivalente à montrer l'existence de B' , ce qui est fait au §6).

- *Corollaire* : Si B' est la base admettant pour matrice de passage T^{-1} dans B , alors : $(u|v) = {}^t u_{B'} v_{B'}$. Une telle base est dite orthonormale ; en la notant $B' = (e_1', e_2', \dots, e_n')$, elle vérifie :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (e_i'|e_i') = 1, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, (e_i'|e_j') = 0.$$

- *Carré scalaire* : $u^2 = (u|u)$. On peut appliquer les règles des égalités remarquables : $(u + v)^2, (u - v)^2, u^2 - v^2$.

¹ David Hilbert : 1862-1943.

² Euclide : 315-255 avant J.-C. (sans certitude).

³ Jorgen Pedersen Gram : 1850-1916.

Un vecteur dont le carré scalaire est égal à 1 est appelé unitaire : $u^2 = (u|u) = 1$.

Deux vecteurs dont le produit scalaire est nul sont dits *orthogonaux* : $u \perp v \Leftrightarrow (u|v) = 0$.

Une base dont tous les vecteurs sont orthogonaux deux à deux est une *base orthogonale*.

Une base orthogonale dont tous les vecteurs sont unitaires est une *base orthonormale*. Dans une telle base la matrice du produit scalaire est la matrice identité :

- **Théorème d'existence** : Il existe toujours une base orthonormale dans un espace préhilbertien réel (en dimension finie : d'après le corollaire précédent).

Alors si $u : (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$ et $v : (y_1, y_2, \dots, y_n)_B$, $(u|v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$.

Si la base canonique B est orthonormale, on dit que le produit scalaire est canonique. On peut alors noter le produit scalaire entre les vecteurs colonnes formés des composantes par un point :

$$(u|v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

- *Exemple* : Si M est une matrice carrée de colonnes $(C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n)$, et qu'on note les colonnes de sa comatrice : $\text{Co}(M) = (K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n)$, alors : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, $(C_i|K_j) = \det(M)$ et $(C_i|K_i) = 0$.

• Une matrice P dont les colonnes forment une base orthonormale est une matrice orthogonale. Une matrice est orthogonale si et seulement si elle vérifie : $P^{-1} = {}^t P$.

Si les colonnes C_i de P forment une base orthogonale, alors : $P^{-1} = \begin{pmatrix} {}^t C_1 / \|C_1\|^2 \\ {}^t C_2 / \|C_2\|^2 \\ \vdots \\ {}^t C_n / \|C_n\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|C_1\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|C_2\|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|C_n\|^2 \end{pmatrix} \times {}^t P$.

2) Définition et propriétés de la norme associée.

L'application $\| \cdot \|$ définie de E dans \mathbb{R} par $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$ est la *norme euclidienne*, et elle possède les propriétés suivantes : ($\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall (u, v) \in E^2$)

$$\|u\| \geq 0.$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E.$$

$$\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \cdot \|u\|.$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{Inégalité triangulaire, encore appelée : inégalité de Minkowski}^4).$$

- *Preuves* : Seule l'inégalité triangulaire pose problème, la démonstration utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz⁵.

- *Remarque* : Une norme *en général* sur E est une application de E dans \mathbb{R} qui vérifie ces propriétés.

- *Autres exemples de normes* : Pour $u : (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$,

$$\|u\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|, \text{ ou bien : } \|u\| = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

⁴ Hermann Minkowski : 1864-1909.

⁵ Augustin Louis Cauchy : 1789-1857. Hermann Amandus Schwarz : 1843-1921.

- *Autres inégalités triangulaires* : $\forall (u, v) \in E^2, \quad | \|u\| - \|v\| | \leq \|u \pm v\| \leq \|u\| + \|v\|.$

- *Preuves* : On applique l'inégalité triangulaire à $(-u) + w$ avec $w = u + v$: $\|v\| \leq \|u\| + \|u + v\|$, et à $(-v) + w$: $\|u\| \leq \|v\| + \|u + v\|.$

3) Inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \boxed{|(u|v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|}.$$

- *Preuve* : $\forall x \in \mathbb{R}, (x \cdot u + v)^2 \geq 0$, donc le discriminant de ce trinôme du second degré de variable x est négatif ou nul.

- *Corollaire* : $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ et $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow |(u|v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$
(Preuve en élevant au carré).

- *Précisions* : Si u et v ne sont pas colinéaires alors : $|(u|v)| < \|u\| \cdot \|v\|$ (car $x \cdot u + v$ ne peut pas être nul).

Si u et v sont colinéaires et de même sens : $(u|v) = \|u\| \cdot \|v\|$, et de sens contraires : $(u|v) = -\|u\| \cdot \|v\|.$

Plus généralement, on peut définir l'angle géométrique (non orienté) de deux vecteurs non nuls par :

$$(\widehat{u, v}) = \text{Arccos}\left(\frac{(u|v)}{\|u\| \cdot \|v\|}\right) \quad (\text{on obtient bien } 0 \text{ si } u \text{ et } v \text{ sont colinéaires et de même sens, et } \pi \text{ s'ils sont de sens contraires}).$$

De même : $\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow u$ et v colinéaires (il suffit d'élever cette égalité au carré pour faire apparaître l'inégalité de Cauchy-Schwarz du cas colinéaire).

- *Exemple d'application* : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent. Montrer que $\sum u_n v_n$ est absolument convergente.

Solution : On peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^{n+1} (pour tout n) avec la norme

euclidienne, aux vecteurs $\begin{pmatrix} |u_0| \\ |u_1| \\ \vdots \\ |u_n| \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} |v_0| \\ |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$: $\sum_{k=0}^n |u_k v_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^n v_k^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2}.$

La série étant à termes positifs et majorée est absolument convergente.

4) Théorème de Pythagore⁶.

$$u \perp v \Leftrightarrow (u|v) = 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

- *Preuve* : Par définition $\|u + v\|^2 = (u + v|u + v) = u^2 + 2(u|v) + v^2 = u^2 + v^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$

- *Remarque* : Si (x_1, x_2, \dots, x_n) est une famille orthogonale, alors $\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$, mais la réciproque est fautive pour $n \geq 3$. Par exemple, pour $x_1 = (1, 2)$, $x_2 = (0, 2)$ et $x_3 = (0, -1)$.

- *Dans une base orthonormale* : Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une telle base (en dimension finie) ainsi qu'un vecteurs $u = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$, la norme euclidienne est alors : $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. En dimension infinie, il suffit de considérer la partie finie minimale de la base dans laquelle est exprimé u (qui est une combinaison linéaire finie d'éléments de B).

- *Réciproquement* : Si E est muni d'une base canonique et d'un produit scalaire ayant la forme précédente, alors la base canonique est orthonormale et le produit scalaire est dit : *produit scalaire canonique*.

⁶ Pythagore : VI^e siècle avant J.-C.

- **Composantes** : Si $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale, alors tout vecteur u s'exprime dans cette base par : $u = (e_1|u).e_1 + (e_2|u).e_2 + \dots + (e_n|u).e_n$. Par suite : $\|u\|^2 = (e_1|u)^2 + (e_2|u)^2 + \dots + (e_n|u)^2$.

- **Preuve** : Soit pour u donné, $v = (e_1|u).e_1 + (e_2|u).e_2 + \dots + (e_n|u).e_n$, alors pour tout i compris entre 1 et n , on a : $(u - v|e_i) = 0$; il s'en suit que $u - v \in B^\perp = \{0_E\}$ donc $v = u$.

- **Remarque** : Cette formule peut être généralisée à la dimension infinie quand il existe une base énumérable, par exemple, pour $B = (e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$: $u = \sum_{n=0}^{\infty} (e_n|u).e_n$, et : $\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (e_n|u)^2$ (seul un nombre fini de termes est non nul).

Dans l'espace des polynômes, avec le produit scalaire : $(P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$. Il existe une base orthonormale $B' = (P_0, P_1, \dots, P_n, \dots)$ (dont on verra au paragraphe 8 qu'il est possible de poser en plus la condition $d^\circ(P_n) = n$). Ainsi, tout polynôme Q vérifie :

$$Q(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 P_n(x)Q(x)dx \right) . P_n(X).$$

À noter : Dans l'espace des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n , la norme euclidienne existe. On peut donc conserver cette norme dans $\mathbb{R}[X]$ et continuer, par abus, à l'appeler norme euclidienne.

- Dans une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ seulement orthogonale : $\forall u \in E, u = \frac{(e_1|u)}{e_1^2} . e_1 + \frac{(e_2|u)}{e_2^2} . e_2 + \dots + \frac{(e_n|u)}{e_n^2} . e_n$.

Et en dimension infinie : $u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e_n|u)}{e_n^2} . e_n$.

5) Orthogonalité, orthogonal d'une partie non vide, supplémentaire orthogonal, théorèmes usuels.

Proposition : Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

- **Preuve** : Soit une combinaison linéaire nulle de k vecteurs de cette famille $\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \dots + \alpha_n.u_n = 0_E$; on fait le produit scalaire avec un vecteur quelconque u_i de cette liste, on obtient alors : $\alpha_i.u_i^2 = 0$, d'où $\alpha_i = 0$ pour tout i , ce qui démontre la proposition.

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à une partie non vide A de E est noté A^\perp et appelée : « orthogonal de A ». En outre, $\forall B$ tel que $A \perp B$ alors $B \subset A^\perp$.

$$A^\perp = \{u \in E, \forall v \in A : u \perp v\}.$$

Proposition : Si A est une partie non vide de E alors A^\perp est un sous-espace vectoriel.

- **Preuve** : Soit α un réel, u et v des éléments de A^\perp et x un vecteur quelconque de A ; A^\perp est non vide car il contient le vecteur nul. En outre : $(\alpha.u|x) = \alpha.(u|x) = 0$, donc $\alpha.u$ est un élément de A^\perp ; enfin : $(u + v|x) = (u|x) + (v|x) = 0$, donc $u + v$ est dans A^\perp qui est bien un sous-espace vectoriel.

- **Cas particulier** : $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

- **Proposition** : Si F est un sous-espace vectoriel de E alors : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ et $F \subset F^{\perp\perp}$. En outre, si F est de dimension finie alors : $F = F^{\perp\perp}$ et $F \oplus F^\perp = E$.

- **Preuve** : Soit $u \in F \cap F^\perp$, alors $(u|u) = 0$ d'où $u = 0_E$. Soit $u \in F$; alors $\forall v \in F^\perp, u \perp v$ donc $u \in F^{\perp\perp}$, donc $F \subset F^{\perp\perp}$. Si F est de dimension finie, soit (e_1, e_2, \dots, e_k) une base orthonormale de F ; soit un vecteur u quelconque de E , on définit, pour tout i compris entre 1 et k : $x_i = (e_i|u)$. Soit alors $v = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \dots + x_k.e_k$, et $w = u - v$; alors : $u = v + w$ où $v \in F$. Pour tout i compris entre 1 et k , on a : $(e_i|w) = (e_i|u) - (e_i|u) = 0$, d'où w est dans l'orthogonal de F et la proposition est démontrée.

- **Contre exemple** : Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, et F le sous espace vectoriel des fonctions nulles au voisinage de 1 : $f \in F \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in [0, 1[, \forall x \in [\varepsilon, 1], f(x) = 0$.

Alors : $F^\perp = \{0_E\}$, et donc : $F^{\perp\perp} = E$.

(Étant donnée une fonction continue g non nulle sur $[a, b]$ avec $0 \leq a < b < 1$, on peut construire $f_\varepsilon \in F$ avec $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{g(x)}$ sur $[a, b]$, nulle sur $[b + \varepsilon, 1]$ et affine entre les deux. On montre alors que $(f_\varepsilon | g) \neq 0$, ce qui implique que, pour être dans F^\perp , g doit être nulle sur tout intervalle $[0, b]$ avec $b < 1$; et comme g est continue en 1 , il en résulte que g est la fonction nulle).

- *Autres propriétés* : Pour A et B des parties quelconques non vides de E , $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.

F et G étant des sous-espaces vectoriels de E , $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

En dimension finie : $F = G \Leftrightarrow F^\perp = G^\perp$, et : $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

- *Preuve* : $\forall u \in B^\perp$, il vérifie la propriété : $(\forall v \in B, u \perp v)$; donc, si $A \subset B$, les éléments de A sont des éléments particuliers de B et ils vérifient cette propriété : $(\forall v \in A, u \perp v)$. Il s'en suit que B^\perp est un ensemble de vecteurs orthogonaux aux éléments de A , il est donc inclus dans le plus grand d'entre eux, à savoir : $B^\perp \subset A^\perp$.

$\forall u \in (F + G)^\perp$, il vérifie : $(\forall v \in F + G, u \perp v)$; il s'en suit que : $(\forall v \in F, u \perp v)$, donc $u \in F^\perp$, et : $(\forall v \in G, u \perp v)$, donc $u \in G^\perp$. Comme $u \in F^\perp \cap G^\perp$, on a ainsi : $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

Réciproquement, soit $u \in F^\perp \cap G^\perp$; alors $u \in F^\perp$, donc : $(\forall v \in F, u \perp v)$, et : $(\forall w \in G, u \perp w)$. Comme tout vecteur de $F + G$ est de la forme $v + w$, donc : $u \perp (v + w)$; il s'en suit que : $u \in (F + G)^\perp$. On a l'inclusion réciproque et on peut conclure que : $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Par suite : $F \cap G \subset (F^\perp \cap G^\perp)^\perp = (F^\perp + G^\perp)^\perp$; d'où, avec la première propriété : $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

La réciproque est vraie si et seulement si $F = F^{\perp\perp}$ et $G = G^{\perp\perp}$, égalités réalisées si F et G sont de dimensions finies (*mais on verra que c'est vrai aussi dans l'espace des polynômes sous certaines conditions*).

Proposition : En dimension finie, tout sous-espace vectoriel possède un unique supplémentaire orthogonal.

- *Exemple* : Si $u \neq 0_E$, u^\perp est un hyperplan. Par exemple, dans \mathbb{R}^3 muni de sa base orthonormale canonique, le vecteur (a, b, c) est orthogonal au plan d'équation $(ax + by + cz = 0)$, c'est un vecteur *normal* au plan.

Théorème de la base orthonormale incomplète : Étant donnée une famille orthonormale (e_1, e_2, \dots, e_k) de l'espace euclidien E ($k < \dim(E)$), on peut la compléter en une base orthonormale de E . (*Remarque* : les vecteurs sont unitaires donc non nuls).

• *Application aux polynômes (hors programme)* : Soit $A = (e_0, e_1, \dots, e_k)$ une famille orthonormale de polynômes (muni d'un produit scalaire, par exemple un produit scalaire intégral). Soit m tel que $A \subset \mathbb{K}_m[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} , de degrés inférieurs ou égaux à m (m est, par exemple, le plus grand degré des e_i).

Il est donc possible de compléter cette famille en une base orthonormale de $\mathbb{K}_m[X]$: $B_m = (e_0, e_1, \dots, e_m)$.

Quel que soit l'entier naturel $n > m$, il est possible de compléter B_m en $B_n = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{K}_n[X]$, avec en outre $B_n \subset B_{n+1}$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, si $n = d^\circ(P)$, il existe alors une famille orthonormale B_n dans laquelle on peut exprimer P .

On obtient ainsi une base orthonormale de $\mathbb{K}[X]$: $B = (e_0, e_1, \dots, e_n, \dots) = \bigcup_{n \geq m} B_n$.

- *Conclusion* : Étant donnée une famille orthonormale finie A de $\mathbb{K}[X]$, il est toujours possible de la compléter pour former une base orthonormale de $\mathbb{K}[X]$.

- *Supplémentaires* : Étant donné un sous-espace vectoriel F de dimension finie de $\mathbb{K}[X]$, il existe un entier naturel m tel que $F \subset \mathbb{K}_m[X]$; il s'en suit que pour tout $n \geq m$, il existe un unique supplémentaire orthogonal G_n à F dans $\mathbb{K}_n[X]$ avec en outre $G_n \subset G_{n+1}$. Soit $G = \bigcup_{n \geq m} G_n$; c'est l'unique supplémentaire orthogonal de F .

Un tel espace de dimension infinie G est tel qu'il existe une base orthonormale $B = (e_0, e_1, \dots, e_n, \dots)$ de $\mathbb{K}[X]$, où (e_0, e_1, \dots, e_m) est une base de F et $(e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_n, \dots)$ une base de G . Tout polynôme P s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire finie d'éléments de cette base. Il en résulte que :

$\forall P \in \mathbb{K}[X]$, pour $n \in \mathbb{N}$, il n'y a qu'un nombre fini de produits scalaires $(P | e_n)$ qui soient non nuls.

La projection orthogonale sur G vérifie donc la formule de la projection orthogonale car elle ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

- *Cas général* : Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension infinie, alors il possède une base $B_0 = (e_0, e_1, \dots, e_n, \dots)$. Soit $F_n = (e_0, e_1, \dots, e_n)$, G_n le supplémentaire orthogonal de F_n dont on a prouvé l'existence ci-dessus, et $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$.

Par ailleurs, soit $u \in G$, alors $\forall v \in F$, il existe un entier naturel n tel que $v \in F_n$ car $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, et comme $u \in G_n$, il en résulte que $u \perp v$ donc $u \in F_n^\perp$. De même, si $u \in F_n^\perp$, alors u est orthogonal à tous les vecteurs de F_n quel que soit n ; donc $u \in G_n$ pour tout n , ce dont on déduit $u \in G$. Il en résulte que $G = F^\perp$.

Étant donné $n \in \mathbb{N}$ quelconque, il existe une base orthonormale $C_n = (u_{n,0}, u_{n,1}, \dots, u_{n,n})$ de F_n qu'on peut compléter par une base orthonormale $D_n = (u_{n,n+1}, \dots)$ de G_n ; $B_n = (u_{n,0}, u_{n,1}, \dots, u_{n,n}, u_{n,n+1}, \dots) = C_n \cup D_n$ est ainsi une base orthonormale de $\mathbb{K}[X]$. Comme $G_{n+1} \subset G_n$, il est possible de trouver un vecteur $u_{n,n+1}$ qui soit dans G_n mais pas dans G_{n+1} ; en outre, G_{n+1} étant un sous-espace vectoriel de dimension finie de G_n , il est possible de choisir $u_{n,n+1}$ orthogonal à tous les vecteurs de G_{n+1} .

Donc : $u_{n+1,k} = u_{n,k}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et comme $u_{n,n+1}$ a été choisi orthogonal à la fois à F_n et à G_{n+1} , c'est-à-dire dans $F_{n+1} \cap G_n$, il s'en suit que $u_{n+1,n+1} = u_{n,n+1}$.

Finalement : $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ admet une base orthonormale $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, tandis que $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ admet une base orthonormale $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$.

- *Exemple* : On prend le produit scalaire canonique, consistant à additionner entre eux les produits des coefficients de même degré, et $F = \text{Vect}(1, X^2, X^4, \dots)$. Alors : $F_n = \text{Vect}(C_n)$ avec $C_n = (1, X^2, X^4, \dots, X^{2n})$, tandis que $G_n = \text{Vect}(D_n)$ avec $D_n = (X^{2n+2}, X, X^3, X^5, \dots, X^{2n+1}, X^{2n+3}, X^{2n+4}, X^{2n+5}, X^{2n+6}, \dots)$ que l'on a ordonné de façon à avoir en premier le polynôme qui va venir compléter F_n pour former F_{n+1} . Il faudra de même réordonner $D_{n+1} = (X^{2n+4}, X, X^3, X^5, \dots, X^{2n+3}, X^{2n+5}, X^{2n+6}, X^{2n+7}, X^{2n+8}, \dots)$. À la fin :

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = (1, X^2, X^4, \dots), \text{ tandis que } D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = (X, X^3, X^5, \dots).$$

- *Conclusion* : Dans $\mathbb{K}[X]$, tout sous-espace vectoriel possède un unique supplémentaire orthogonal, et toute famille orthonormale peut être complétée pour former une base orthonormale de $\mathbb{K}[X]$. En outre, comme on a ainsi : $F \oplus F^\perp = \mathbb{K}[X]$, et aussi : $F^{\perp\perp} \oplus F^\perp = \mathbb{K}[X]$, il s'en suit que $F^{\perp\perp} = F$.

Il en résulte qu'étant donnée une famille orthogonale $(P_0, P_1, \dots, P_n, \dots)$ de polynômes, par exemples celles du paragraphe 18, tout polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ n'a qu'un nombre fini de produits scalaires non nuls avec les éléments de cette famille (car on peut appliquer la formule de la projection orthogonale).

- *Remarque* : Ce qui est vrai, ici, dans l'espace des polynômes, est tout aussi vrai dans n'importe quel espace de dimension infinie muni d'une base énumérable, voire dénombrable.

- *Cas particulier des polynômes* : On a vu au paragraphe précédent qu'il n'existait qu'un nombre fini de produits scalaires non nuls avec la famille orthonormale ; on peut donc écrire, dans ce cas particulier, pour une famille orthonormale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un polynôme Q quelconque : $\sum_{n=0}^{\infty} (P_n | Q)^2 \leq \|P\|^2$.

6) Procédé d'orthogonalisation (ou orthonormalisation) de Schmidt⁷ (ou de : Gram-Schmidt).

Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E ; il existe une unique base orthonormale $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ telle que pour tout k compris entre 1 et n : $(e_k | e'_k) > 0$ et $\text{Vect}(e'_1, e'_2, \dots, e'_k) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

⁷ Erhard Schmidt : 1876-1959.

- *Algorithme* : $e_1'' = e_1$; $(e_1'', e_2'', \dots, e_k'')$ étant calculés, on pose au rang suivant :

$$e_{k+1}'' = \lambda_{k+1,1} \cdot e_1'' + \lambda_{k+1,2} \cdot e_2'' + \dots + \lambda_{k+1,k} \cdot e_k'' + e_{k+1}.$$

Les valeurs des $\lambda_{k+1,j}$ sont obtenues en utilisant les relations d'orthogonalité. On obtient ainsi une base orthogonale $(e_1'', e_2'', \dots, e_n'')$; il ne reste plus ensuite qu'à diviser les vecteurs par leurs normes respectives $e_k' = \pm e_k'' / \|e_k''\|$, le signe étant déterminé tel que $(e_{k+1}' | e_{k+1}') > 0$ pour obtenir la base orthonormale souhaitée.

• En pratique, il suffit de trouver une base orthogonale, la base orthonormale étant déduite à la fin si c'est utile. En outre, comme $\text{Vect}(e_1', e_2', \dots, e_k') = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$, on peut poser plus simplement :

$$e_{k+1}'' = \lambda_{k+1,1} \cdot e_1 + \lambda_{k+1,2} \cdot e_2 + \dots + \lambda_{k+1,k} \cdot e_k + e_{k+1}.$$

Et il suffit ensuite de faire les produits scalaires avec e_1 à e_k , ce qui donne un système de k équations.

- *Exemple* : Orthonormaliser $((1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 4, 9))$. (Dans \mathbb{R}^3 le troisième vecteur peut être obtenu avec le produit vectoriel).

- *Corollaire* : Si (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base de E et u un vecteur de E tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (u | e_i) = 0$, alors : $u = 0_E$.

- *Cas des polynômes* : Étant donné un produit scalaire, il est toujours possible, pour tout entier naturel n , de trouver une base orthonormale $B_n = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ par le procédé de Gram-Schmidt. Ainsi, $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ est une base orthonormale de $\mathbb{K}[X]$ qui répond à toutes les conditions.

7) Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales. Distance d'un vecteur à un sous-espace.

Soit p la projection orthogonale sur $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ où (u_1, u_2, \dots, u_k) est une famille orthonormale ; alors :

$$p(u) = (u | u_1) \cdot u_1 + (u | u_2) \cdot u_2 + \dots + (u | u_k) \cdot u_k.$$

- *Preuve* : S'il est clair qu'ainsi défini $p(u)$ est dans F , encore faut-il que $u - p(u)$ soit dans F^\perp . Il suffit de faire le produit scalaire par tous les u_i , et comme ils sont tous nuls le résultat est acquis.

- *Remarque* : En dimension finie, la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormale est symétrique (démonstration au chapitre 1).

- *Expression matricielle* : Si U_i est le vecteur colonne des coordonnées de u_i dans la base canonique, alors la matrice de p dans cette même base est : $U_1 {}^t U_1 + U_2 {}^t U_2 + \dots + U_k {}^t U_k$. (En dimension finie).

- *Remarque* : Si la famille $A = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ est orthogonale, mais que les vecteurs ne sont pas unitaires, la formule devient :

$$p(u) = \frac{(u | u_1)}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 + \frac{(u | u_2)}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 + \dots + \frac{(u | u_k)}{\|u_k\|^2} \cdot u_k. \quad (\text{« Formule de la projection orthogonale »}).$$

En notant p_i la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u_i)$, on a donc : $p = p_1 + p_2 + \dots + p_k$.

En notant q la projection orthogonale sur F^\perp (en dimension finie), alors $p + q = \text{id}_E$.

- *Cas particulier de \mathbb{R}^3* : Sur le plan $\text{Vect}(u_1, u_2)$,

$$p(u) = u - \frac{(u | u_1 \wedge u_2)}{\|u_1 \wedge u_2\|^2} \cdot (u_1 \wedge u_2) = u - \frac{\det(u, u_1, u_2)}{\|u_1\|^2 \|u_2\|^2 \sin^2(\widehat{u_1, u_2})} \cdot (u_1 \wedge u_2) = u - \frac{\det(u, u_1, u_2)}{\|u_1\|^2 \|u_2\|^2 - (u_1 | u_2)^2} \cdot (u_1 \wedge u_2).$$

Si s est la symétrie associée à p , $s = 2p - \text{id}_E$, alors s est une symétrie orthogonale :

$$s(u) = 2((u|u_1) \cdot u_1 + (u|u_2) \cdot u_2 + \dots + (u|u_k) \cdot u_k) - u.$$

En remarquant au passage que $s = \text{id}_E - 2q$, est opposée à la symétrie orthogonale par rapport à F^\perp .

- *Remarque* : La matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormale est symétrique (démonstration au chapitre 1).

- **Cas particulier d'un hyperplan** : Un hyperplan peut être donné comme l'orthogonal d'un vecteur non nul ; $H = w^\perp$. Alors, si p est la projection orthogonal sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H , on a :

Pour $q(u) = \frac{(u|w)}{\|w\|^2} \cdot w$, $p(u) = u - q(u)$ et $s(u) = u - 2 \cdot q(u)$. (q est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(w)$).

• La distance de u au sous-espace $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ est alors :

$$d(u, F) = \|u - p(u)\| = \|q(u)\|.$$

- *Proposition* : $d(u, F) = \inf\{d(u, w), w \in F\}$.

- *Avec la remarque* : Pour tout vecteur v de F alors : $\|x - p(x)\| \leq \|x - v\|$.

- *Preuve* : $x - v = (x - p(x)) + (p(x) - v)$ avec $(x - p(x)) \in F^\perp$ et $(p(x) - v) \in F$; on peut donc appliquer le théorème de Pythagore, c'est-à-dire : $\|x - v\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - v\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2$, d'où le résultat.

En dimension finie, soit (u_1, u_2, \dots, u_k) une base orthonormale de F qu'on complète pour former une base orthonormale de tout l'espace, à savoir : $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Alors :

$$v = u - p(u) = (u|u_{k+1}) \cdot u_{k+1} + (u|u_{k+2}) \cdot u_{k+2} + \dots + (u|u_n) \cdot u_n.$$

En remarquant au passage que $u = p(u) + v$ et $s(u) = p(u) - v$, alors v est la projection orthogonale de u sur F^\perp et :

$$d(u, F) = \sqrt{(u|u_{k+1})^2 + (u|u_{k+2})^2 + \dots + (u|u_n)^2}.$$

- *Remarque* : En utilisant la notation des matrices de Gram, alors : $d(u, F) = \sqrt{\frac{\det(G(u_1, u_2, \dots, u_k, u))}{\det(G(u_1, u_2, \dots, u_k))}}$.

(Dans cette formule, la base de F n'a pas besoin d'être orthonormale, elle peut être quelconque).

- *Preuve* : On écrit $u = (u - p(u)) + p(u) = v + p(u)$ dans la matrice de Gram, et on décompose la dernière ligne en une somme dont le premier terme est $(0, 0, \dots, 0, v^2)$ et le second terme une combinaison linéaire des lignes précédentes. En effet, comme $p(u)$ est une combinaison linéaire des u_i : $p(u) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$, alors $(p(u)|u_i) = \alpha_1 (u_1|u_i) + \dots + \alpha_k (u_k|u_i)$. Ainsi :

$\det(G(u_1, u_2, \dots, u_k, u)) = \det(G(u_1, u_2, \dots, u_k, v + p(u))) = v^2 \cdot \det(G(u_1, u_2, \dots, u_k)) + 0$, donc :

$v^2 = d(u, F)^2 = \det(G(u_1, u_2, \dots, u_k, u)) / \det(G(u_1, u_2, \dots, u_k))$. (Voir le paragraphe 7 du chapitre G pour plus de détails).

• *Cas particuliers.*

① En dimension trois : Soit $F = \text{Vect}(u, v) = w^\perp$. Alors, pour $e \in E$:

$$d(e, F) = |\det(e, u, v)| / \|u \wedge v\| = |(e|w)| / \|w\|.$$

- *Distance d'un point à un plan* : Si $P = (A; u, v) = (A; w^\perp)$, d'équation $(ax + by + cz + d = 0)$;

$$d(M, P) = |\det(\overrightarrow{AM}, u, v)| / \|u \wedge v\| = |(\overrightarrow{AM}|w)| / \|w\| = |ax + by + cz + d| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Soit $F = \text{Vect}(u)$: $d(e, F) = \|e \wedge u\| / \|u\|$.

- Distance d'un point à une droite de l'espace (en dimension 3) : Si $D = (A; u)$, $d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge u\|}{\|u\|}$.

- Distance de deux droites parallèles : $d((A; u), (B; u)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge u\|}{\|u\|}$.

- Distance de deux droites non parallèles : $d((A; u), (B; v)) = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, u, v)|}{\|u \wedge v\|}$.

② Dans le plan euclidien : Soit $F = \text{Vect}(u) = w^\perp$. Alors, pour $e \in E$:

$$d(e, F) = |\det(e, u)|/\|u\| = |(e|w)|/\|w\|.$$

- Distance d'un point à une droite du plan : Si $D = (A; u) = (A; w^\perp)$, d'équation $(ax + by + c = 0)$;

$$d(M, D) = |\det(\overrightarrow{AM}, u)|/\|u\| = |(\overrightarrow{AM}|w)|/\|w\| = |ax + by + c|/\sqrt{a^2 + b^2}.$$

8) Méthode des moindres carrés.

Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ une suite de points du plan, et $\Delta: (y = ax + b)$ la droite optimale passant « au plus près » de ces différents points (droite de régression).

Dans $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et d'une base orthonormale canonique $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, soit les trois vecteurs : $u: (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v: (1, 1, \dots, 1)$ et $w: (y_1, y_2, \dots, y_n)$. En notant $F = \text{Vect}(u, v)$ et p la projection orthogonale sur F , on obtient une distance minimale pour :

$$\mathbf{p(w) = a \cdot u + b \cdot v} \quad (\text{c'est le vecteur idéal pour lequel tous les points } (x_k, ax_k + b) \text{ sont sur la droite}).$$

D'où l'on déduit les valeurs de a et b en calculant :

$$(\mathbf{w - p(w)} | \mathbf{u}) = (\mathbf{w - p(w)} | \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

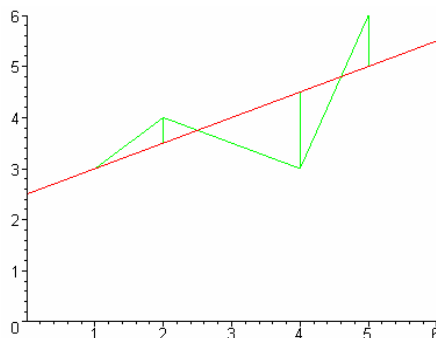
C'est-à-dire : $(w - (au + bv)|u) = (w - (au + bv)|v) = 0$, ce qui génère un système de deux équations à deux inconnues a et b .

Il est possible aussi de donner un vecteur $u' = u + \lambda \cdot v$ tel que $u' \perp v$ ($\lambda = -(\Sigma x_k)/n$) ; il n'y a plus ensuite qu'à appliquer la formule de la projection orthogonale (c'est plus long).

- Autre approche : On peut aussi chercher à minimiser directement $\|w - (a \cdot u + b \cdot v)\|^2$, c'est-à-dire, finalement :

$$\sum_{k=1}^n (y_k - ax_k - b)^2 \quad (\text{c'est la somme des carrés des différences d'ordonnées, d'où le nom de : « moindres carrés »}).$$

- Exemple : Trouver la droite optimale pour les points $M_1:(1, 3)$, $M_2:(2, 4)$, $M_3:(4, 3)$, $M_4:(5, 6)$.



- Réponse : $a(1 + 2 + 4 + 5) + 4b = 3 + 4 + 3 + 6$ et $a(1 + 4 + 16 + 25) + b(1 + 2 + 4 + 5) = 1.3 + 2.4 + 4.3 + 5.6$, d'où finalement : $(y = (x + 5)/2)$.

- Avec la formule de la projection orthogonale : $u: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w: \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\rightarrow u': \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$$p(w) = \frac{(u|w)}{u^2} \cdot u + \frac{(v|w)}{v^2} \cdot v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7/2 \\ 9/2 \\ 5 \end{pmatrix} = au + bv \text{ donne les mêmes valeurs de } a \text{ et } b.$$

- Méthode des moindres carrés en statistiques (droite de régression) :

La moyenne des x_i : $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$; la moyenne des y_i : $\bar{y} = (y_1 + \dots + y_n)/n$; la variance des x_i : $V(x) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)/n - \bar{x}^2$; la covariance des x_i et des y_i : $\text{Cov}(x, y) = (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)/n - \bar{x} \cdot \bar{y}$. Les deux relations utiles sont alors : $a = \text{Cov}(x, y)/V(x)$, et : $b = \bar{y} - a\bar{x}$. Quand on cherche a et b tels que : $p(w) = a.u + b.v$ avec $(w - p(w)|u) = (w - p(w)|v) = 0$. C'est un système de deux équations à deux inconnues qui divisées par n s'écrivent aussi : $a\bar{x} + b = \bar{y}$ et $a(V(x) + \bar{x}^2) + b\bar{x} = \text{Cov}(x, y) + \bar{x} \cdot \bar{y}$. On obtient évidemment la même solution. Avec l'exemple ci-dessus : $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 4$, $V(x) = 5/2$, $\text{Cov}(x, y) = 5/4$.

9) Définition des limites et de la continuité d'une fonction d'un espace préhilbertien dans un autre.

Étant donnés E et F deux espaces préhilbertiens réels, U une partie de E et l'application $f: U \rightarrow F$. Alors, pour $a \in U$ (ou à la frontière) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon)$$

$$f \text{ continue en } a \in U \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \text{ (On remplace } b \text{ par } f(a) \text{ dans la formule précédente).}$$

(Si a est à la frontière de U , l'existence de cette limite permet de faire un prolongement par continuité).

f est continue sur une partie A de U si et seulement si elle est continue en tout point de A . Il faut toutefois faire la remarque suivante : Avec cette définition, la fonction $(x \mapsto 1/x)$ est continue sur \mathbb{R}^* ; une fonction est continue s'il est possible de cheminer entre deux points quelconques du graphe (sans lever le crayon), sur tout intervalle contenu dans A (pour $1/x$: sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$).

- Remarque : Lorsque l'un des deux espaces est \mathbb{R} lui-même, la norme doit être remplacée par la valeur absolue (qui est la norme sur \mathbb{R}).

Lorsqu'il n'y a pas de problèmes la limite d'une somme d'un produit, d'un quotient ou d'une composée est égale respectivement à la somme, au produit, au quotient ou à la composée des limites. Mais **attention**, on ne peut faire des produits ou des quotients que lorsque l'espace d'arrivée le permet, si $F = \mathbb{R}$; exemple :

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 3x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 + \lim_{x \rightarrow a} 3x = a^2 + 3a ; \lim_{x \rightarrow a} x^2 \cdot \sin(x) = (\lim_{x \rightarrow a} x^2)(\lim_{x \rightarrow a} \sin(x)) = a^2 \cdot \sin(a) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos(x)/(x^2+1) = (\lim_{x \rightarrow a} \cos(x))/(\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 1)) = \cos(a)/(a^2 + 1).$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\sin(2x^2 - 1)) = \sin(\lim_{x \rightarrow a} (2x^2 - 1)) = \sin(2a^2 - 1). \text{ Etc...}$$

Si deux fonctions sont continues, il en est de même de leur somme, leur produit, leur quotient (à condition de ne pas annuler le dénominateur), et de leur composée (avec les précautions d'usage quant aux points où les fonctions doivent être continues). Comme dans le cas des limites, on ne peut faire des produits ou des quotients que lorsque l'espace d'arrivée est \mathbb{R} .

Ces propriétés sont vraies aussi pour le produit scalaire et, si $\dim(F) = 3$, pour le produit vectoriel.

- *Précautions d'usage* : Une telle limite n'existe pas toujours et peut être source de paradoxes si on ne traite pas convenablement le problème. Par exemple : $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$, $f(x, y) = x/y$; et on cherche la limite quand le vecteur (x, y) tend vers 0_E avec $x > 0$ et $y > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{y \rightarrow 0^+} x/y = +\infty$ et $\lim_{y \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0^+} x/y = 0$.

- *En appliquant la définition* : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in E, \sqrt{x^2 + y^2} < \eta \Rightarrow |x/y - b| < \varepsilon$. Il faut montrer qu'un tel η n'existe pas : $\sqrt{x^2 + y^2} < \eta \Rightarrow x$ et $y \in]0, \sqrt{\eta}[$ et alors : $x/y > x/\sqrt{\eta}$. Pour tout ε il est possible, x étant fixé non nul, de donner des valeurs à y qui rendent x/y aussi grand qu'on veut.

- *Méthode classique pour démontrer la discontinuité* : Il est plus indiqué d'appliquer la méthode consistant à approcher le point de discontinuité par des chemins différents, si possible des droites. Ici, sur la droite $(y = x)$ on obtient $f(x, y) = x/y = 1$, et sur la droite $(y = -x)$ on obtient $f(x, y) = -1$. Comme il est impossible qu'il y ait deux limites distinctes 1 et -1 au point d'intersection de ces deux droites, alors il n'y a pas de limite en $(0, 0)$.

- *Conclusion* : $x \rightarrow a$ signifie qu'il existe η assez petit tel que $\|x - a\| < \eta$; il n'est pas question de considérer qu'une composante de x tend vers une composante de a avant ou après une autre. Par contre, si E est de dimension finie et que $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale, alors pour $x = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \dots + x_n.e_n$ (idem pour $a = \sum a_i.e_i$), $\|x - a\| < \eta \Rightarrow |x_i - a_i| < \eta$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

L'implication réciproque est fautive, mais : $|x_i - a_i| < \eta$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \Rightarrow \|x - a\| < \eta \cdot \sqrt{n}$.

- *Propriétés* : Si f et g définies de U dans F admettent des limites en $a \in U$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) ;$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) ;$$

Si G est un espace préhilbertien réel, et $g : V \rightarrow G$ où V est une partie de G . Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in V \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) \text{ (si cette limite existe).}$$

S'il existe un produit dans F : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) \cdot (\lim_{x \rightarrow a} g(x))$ (multiplication réelle ou produit vectoriel de \mathbb{R}^3) ;

$$\text{De même : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \text{ et } \lim_{y \rightarrow b} g(y) = \beta \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x)g(y) = \alpha\beta ;$$

Si $F = \mathbb{R}$ et si $\exists \eta > 0$ tel que $g(x) \neq 0$ pour $\|x - a\| < \eta$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) / (\lim_{x \rightarrow a} g(x))$.

- *Preuve* : Soit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$; alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0$ tel que $\forall x \in U, \|x - a\| < \eta' \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon/2$; et : $\exists \eta'' > 0$ tel que $\forall x \in U, \|x - a\| < \eta'' \Rightarrow \|g(x) - c\| < \varepsilon/2$. Soit $\eta = \inf\{\eta', \eta''\}$, alors : $\|f(x) + g(x) - b - c\| \leq \|f(x) - b\| + \|g(x) - c\| < \varepsilon$, ce qui démontre la limite de la somme.

Le cas $\lambda = 0$ est trivial ; soit donc : $\lambda \neq 0$. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon/|\lambda|$; d'où le résultat évident : $\|\lambda f(x) - \lambda b\| = |\lambda| \cdot \|f(x) - b\| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \varepsilon' > 0$ donc $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon'$, et pour $y = f(x), \|y - b\| < \eta \Rightarrow \|g(y) - c\| < \varepsilon$. On a donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|g \circ f(x) - c\| < \varepsilon$. Ce qui démontre la propriété sur la composée.

On a maintenant $F = \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0$ tel que $\forall x \in U, \|x - a\| < \eta' \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon/(|b| + |c| + 1)$; et : $\exists \eta'' > 0$ tel que $\forall x \in U, \|x - a\| < \eta'' \Rightarrow |g(x) - c| < \inf\{1, \varepsilon/(|b| + |c| + 1)\}$. Soit alors $\eta = \inf\{\eta', \eta''\}$, on a ainsi : $|fg(x) - bc| = |(f(x) - b) \cdot g(x) + (g(x) - c) \cdot b|$, d'où : $|fg(x) - bc| \leq |f(x) - b| \cdot |g(x)| + |g(x) - c| \cdot |b| < |f(x) - b| \cdot (|c| + 1) + |g(x) - c| \cdot |b| < (\varepsilon/(|b| + |c| + 1)) \cdot (|b| + |c| + 1) + |b| \cdot \varepsilon/(|b| + |c| + 1) = \varepsilon$, d'où le résultat.

On a enfin : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0$ tel que $\forall x \in U, \|x - a\| < \eta' \Rightarrow |f(x) - b| < c^2\varepsilon/2(|b| + |c|)$; et : $\exists \eta'' > 0$ tel que $\forall x \in U, \|x - a\| < \eta'' \Rightarrow |g(x) - c| < \inf\{|c|/2, c^2\varepsilon/2(|b| + |c|)\}$. Soit alors $\eta = \inf\{\eta', \eta''\}$, on a pour finir : $|(f/g)(x) - b/c| = |(f(x) - b)/g(x) - (g(x) - c) \cdot b/(c \cdot g(x))|$, d'où : $|(f/g)(x) - b/c| \leq |f(x) - b|/|g(x)| + |g(x) - c| \cdot |b|/|c| \cdot |g(x)| < c^2\varepsilon/2(|b| + |c|) \cdot 2/|c| + |b| \cdot c^2\varepsilon/2(|b| + |c|) \cdot 2/c^2 = \varepsilon$, car $1/|g(x)| < 2/|c|$; la proposition est donc démontrée.

- *Propriétés de la continuité* : Elles sont déduites directement des propriétés des limites. Si f et g sont continues en a alors λf et $(f + g)$ sont continues en a . Si en outre $F = \mathbb{R}$, alors fg est continue en a , et si $g(a)$ n'est pas nul alors f/g est continue en a . Enfin, sous les bonnes hypothèses, si f est continue en a et g en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a . (Idem pour le produit scalaire et le produit vectoriel).

- *Proposition* : Si E est un espace préhilbertien réel alors, en prenant lorsque l'ensemble de départ est E^2 la norme produit : $\|(u, v)\| = \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}$, les applications suivantes sont continues¹ :

- La norme, l'addition, la loi externe et le produit scalaire.

- Si F est aussi un espace préhilbertien réel alors, une applications linéaire f de $\mathcal{L}(E, F)$ est continue sur E si et seulement si : soit E est de dimension finie, soit f est continue en 0_E . C'est la même chose pour les applications bilinéaires de $E \times E$ dans F .

- Les formes linéaires f telles qu'il existe un vecteur fixe a de E pour lequel $f(x) = (a|x)$ sont continues.

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de la norme euclidienne, en l'occurrence : $\|M\| = \sqrt{\text{tr}MM^t}$, alors, étant données les matrices A_0, A_1, \dots, A_q , alors : $(M \mapsto A_0 + A_1 M + \dots + A_q M^q)$ est continue. En particulier, si Q est un polynôme, $(M \mapsto Q(M))$ est continue.

- *Somme de fonctions à variables séparées* : Soit $f(x, y) = \phi(x) + \psi(y)$, où ϕ est continue en x_0 , et ψ est continue en y_0 . Alors f est continue en (x_0, y_0) .

- *Preuve* : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 > 0$ et $\exists \eta_2 > 0, |x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |\phi(x) - \phi(x_0)| < \varepsilon$ et $|y - y_0| < \eta_2 \Rightarrow |\psi(y) - \psi(y_0)| < \varepsilon$.

D'où : $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |\phi(x) - \phi(x_0)| + |\psi(y) - \psi(y_0)| < 2\varepsilon$, et ceci pour : $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$, donc : $\eta = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$ convient.

• *Il y plus simple et plus général* :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \phi(x_0) \text{ et } \lim_{y \rightarrow y_0} \psi(y) = \psi(y_0) \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \phi(x) = \phi(x_0) \text{ et } \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \psi(y) = \psi(y_0) \Rightarrow$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (\phi(x) + \psi(y)) = \phi(x_0) + \psi(y_0).$$

On peut appliquer le même principe aux produits et aux quotients (si le dénominateur n'est pas nul).

10) Fonctions continues par morceaux.

- *Subdivisions* : On appelle subdivision d'un intervalle $[a, b]$, une famille $S = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ telle que l'on ait : $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Une subdivision S' est plus fine que la subdivision S si $S \subset S'$. Étant données deux subdivisions S et S' de $[a, b]$, $S'' = S \cup S'$ est une subdivision plus fine que S et S' .

Il y a donc un nombre fini d'étapes sur un intervalle fermé borné.

Une fonction numérique f définie sur $[a, b]$ est continue par morceaux si et seulement s'il existe une subdivision $S = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ (avec $x_0 = a$ et $x_n = b$), telle que f soit continue sur tout intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ (pour $k = 0$ à $n - 1$), et qu'elle admette des limites finies à droite en x_k et à gauche en x_{k+1} ; on dit que la subdivision S est *adaptée* à f .

Une fonction numérique f définie sur un intervalle quelconque I est continue par morceaux sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout intervalle fermé borné inclu dans I .

Il peut donc y avoir un nombre infini d'intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, donc un nombre infini de points de discontinuité, si I est de largeur infinie. Par contre, il n'y en a qu'un nombre fini sur toute partie bornée de I ; il est en outre possible d'indexer ces points avec des indices entiers relatifs ou naturels selon que I est infini des deux côtés ou non.

- *Remarques* : Les points où une telle fonction n'est pas continue sont appelés : des points de discontinuité de première espèce, car il existe en ces points une limite finie à droite et à gauche. Tout point de l'intervalle de

définition d'une telle fonction possède donc une limite à droite et une limite à gauche. En outre, l'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable, ce qui signifie que : Soit il est fini, soit on peut le mettre en bijection avec l'un des ensembles de nombres suivants : \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{D} (les décimaux) ou \mathbb{Q} .

Une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ n'est pas nécessairement bornée, ni une fonction continue par morceaux sur $]-\infty, b]$.

- *Proposition* : Soit f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et un réel quelconque $\varepsilon > 0$, alors il existe deux fonctions ϕ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que :

$$\forall x \in [a, b], 0 \leq \psi(x) - \phi(x) \leq \varepsilon \text{ et } \phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x).^{ii}$$

Proposition : Une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

(Car f peut être prolongée en une fonction continue f_k sur tout intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ de la subdivision adaptée à f , et l'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné).

• Une fonction définie sur $[a, b]$ est de classe C^1 par morceaux s'il existe une subdivision S telle que la restriction de f à tout intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ de la subdivision est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[x_k, x_{k+1}]$.

- *Remarque* : Si on remplace C^1 par C^0 , cette définition devient équivalente à la définition de la continuité par morceaux. Il est en outre possible d'appliquer cette même définition pour définir les fonction de classe C^n par morceaux, pour $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

- *Exemple* : Une fonction en escalier sur $[a, b]$ est telle qu'il existe une subdivision S de $[a, b]$ (*adaptée à f*), pour laquelle f est constante sur tout intervalle $]x_k, x_{k+1}[$; elle est en escalier sur un intervalle quelconque I si elle est en escalier sur tout intervalle fermé borné incluant dans I . C'est un cas particulier de fonction continue par morceaux.

Autre exemple : f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{E(x)}$.

- *Opérations* : La somme, le produit, la composée et le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues par morceaux (respectivement de classe C^1 par morceaux) est continue par morceaux (respectivement de classe C^1 par morceaux).

- *Preuve* : Pour la somme, le produit et le quotient, il faut que les fonctions soient continues par morceaux (ou de classe C^1 par morceaux) sur le même intervalle $[a, b]$; en outre, si S est la subdivision adaptée à f et S' la subdivision adaptée à g , $S'' = S \cup S'$ est la subdivision associée à $f + g$, fg ou f/g (si g ne s'annule pas). Aux points de discontinuité, la fonction résultat de l'opération n'est définie que si les deux fonctions f et g sont définies ; dans les autres cas, elle y admet des limites finies à gauche et à droite (par propriété des limites). Il n'y a pas de problème aux autres points où l'on peut utiliser les théorèmes usuels sur les fonctions continues (ou de classe C^1).

Pour la composition $g \circ f$, il faut que g soit continue par morceaux (ou de classe C^1 par morceaux) sur un intervalle $[c, d]$, et f de $[a, b]$ dans $[c, d]$. Si f n'est pas continue en $x_0 \in [a, b]$, ou si elle l'est, si g n'est pas continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ admet des limites finies à gauche et à droite (par propriété des limites) ; il n'y a pas de problème aux autres points où l'on peut utiliser les théorèmes usuels sur les fonctions continues (ou de classe C^1).

Une fonction définie sur \mathbb{R} est T -périodique ($T > 0$) si : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$. Le réel T est une période de f ; la plus petite période strictement positive est *la période fondamentale*.

L'ensemble des fonctions continues et T -périodiques sur \mathbb{R} est un espace préhilbertien réelⁱⁱⁱ.

Avec :
$$(f|g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t)dt$$

• *Proposition* : $\forall x \in \mathbb{R}, (f|g) = \int_x^{x+T} f(t)g(t)dt$.

- *Preuve* : Soit $n = 1 + E(x/T)$; alors : $(n - 1)T \leq x < nT$. On décompose ensuite : $\int_x^{x+T} fg(t)dt = \int_{nT}^{x+T} fg(t)dt + \int_x^{nT} fg(t)dt$; dans la première intégrale on fait le changement de variable : $u = t - nT$, et dans la seconde : $v = t + (1 - n)T$. Ainsi :

$$\int_x^{x+T} fg(t)dt = \int_0^{x+(1-n)T} fg(u)du + \int_{x+(1-n)T}^T fg(v)dv = (f|g).$$

Une fonction T -périodique est continue par morceaux sur \mathbb{R} si elle est continue par morceaux sur une période $[a, a + T]$. Plus généralement : Une fonction T -périodique est de classe C^k par morceaux sur \mathbb{R} si elle est de classe C^k par morceaux sur une période $[a, a + T]$.

- *Proposition* : Une fonction T -périodique continue par morceaux est bornée.

- *Remarque* : Le produit scalaire défini précédemment n'est plus un produit scalaire pour les fonctions T -périodiques continues par morceaux car, par exemple, la fonction qui vaut 1 sur \mathbb{Z} et 0 sinon est 1-périodique, continue par morceaux et a un carré scalaire nul ($f(x) = 1 + E(x) + E(-x)$). Il faut toutefois noter que la grande majorité des fonctions étudiées en exemple et en exercice appartiennent plutôt aux cas cités plus haut des fonctions continues soit à gauche, soit à droite.

Proposition : Soit⁸ $A = (e_n)_{n \in \mathbb{N}} \cup (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $e_n(t) = \cos(2n\pi t/T)$ et $s_n(t) = \sin(2n\pi t/T)$; cette famille est orthogonale (et libre car 0 est exclu), dans l'un quelconque des espaces préhilbertiens cités en exemple. En outre, seul e_0 est unitaire, tous les autres sont de norme $1/\sqrt{2}$.

- *Preuve* : On utilise les formules trigonométriques $2 \cdot \cos(a)\cos(b) = \cos(a - b) + \cos(a + b)$, $2 \cdot \sin(a)\sin(b) = \cos(a - b) - \cos(a + b)$, et $2 \cdot \sin(a)\cos(b) = \sin(a + b) + \sin(a - b)$. On intègre ensuite de simples fonctions trigonométriques sur une période, d'où les différents résultats nuls. On calcule ensuite les normes et les résultats sont immédiats en appliquant $\cos^2(a) = (1 + \cos(2a))/2$ et $\sin^2(a) = (1 - \cos(2a))/2$.

• Soit $A_n = (e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \cup (s_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, $F_n = \text{Vect}(A_n)$, et p_n la projection orthogonale sur F_n (dans l'un quelconque des espaces préhilbertiens cités en exemple). On note $\omega = 2\pi/T$, f étant une fonction T -périodique continue par morceaux vérifiant la condition souhaitée. Alors :

$$p_n(f) = (f|e_0) \cdot e_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^n ((f|e_k) \cdot e_k + (f|s_k) \cdot s_k) \quad (\text{formule de la projection orthogonale}).$$

Ainsi :
$$p_n(f)(x) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t)dt + \frac{2}{T} \cdot \sum_{k=1}^n \int_0^T (\cos(k\omega t)\cos(k\omega x) + \sin(k\omega t)\sin(k\omega x)) \cdot f(t)dt =$$

$$p_n(f)(x) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t)dt + \frac{2}{T} \cdot \sum_{k=1}^n \int_0^T f(t) \cdot \cos(k\omega(t - x))dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t)dt + \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot (\sum_{k=1}^n \cos(k\omega(t - x)))dt = \dots =$$

$$p_n(f)(x) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{\sin((n + 1/2)\omega(t - x))}{\sin(\omega(t - x)/2)} \cdot f(t)dt \quad (\text{avec le résultat du chapitre A.1}).$$

Avec le théorème de Dirichlet⁹ (cf. §14), si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, pour tout x de $]a, b[$ (qu'on peut étendre à $[a, b]$ si $f(b) = f(a)$) :

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\sin((n + 1/2)\omega(t - x))}{\sin(\omega(t - x)/2)} \cdot f(t)dt, \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{b - a}.$$

- *Application* : Pour f de classe C^1 sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et $x \in]-\pi/2, \pi/2[$: $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin((2n + 1)(t - x))}{\sin(t - x)} \cdot f(t)dt.$

(Par exemple, si $f(x) = 1$, la fonction constante, alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin((2n + 1)(t - x))}{\sin(t - x)} \cdot dt = \pi$).

Si $x = 0$:
$$f(0) = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin((2n + 1)t)}{\sin(t)} \cdot f(t)dt.$$

Soit h une fonction telle que $h(t) \sim t$ quand t tend vers 0, et $f(t) = \sin(t)/h(t)$ (elle est donc prolongée par continuité en 0 avec : $f(0) = 1$). Alors :

$$f(0) = 1 = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin((2n + 1)t)}{h(t)} \cdot dt \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin((2n + 1)t)}{h(t)} \cdot dt = \pi.$$

⁸ On note e_n et non pas c_n car cette dernière notation est réservée aux coefficients de Fourier complexes.

⁹ Peter Gustav Lejeune-Dirichlet : 1805-1859 .

On développe cette formule avec $\sin(a + b)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos(t)}{h(t)} \cdot dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2nt)}{f(t)} \cdot dt \right) = \pi$. Comme $1/f$ est bornée sur cet intervalle, la seconde limite est nulle, d'où : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos(t)}{h(t)} \cdot dt = \pi$. En appliquant la formule

de la moyenne généralisée (cf. le chapitre F) à cette expression, on prouve l'existence de : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{h(t)} \cdot dt$.

En appliquant la formule initiale à $f(t) = \sin(t)\cos(t)/h(t)$: $f(0) = 1 = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{h(t)} \cdot \cos(t) dt$, d'où :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin((2n+2)t) + \sin(2nt)}{2 \cdot h(t)} \cdot dt = \pi$; c'est-à-dire, les deux sinus du numérateur donnant la même limite :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{h(t)} \cdot dt = \pi$. On en déduit : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{h(t)} \cdot dt = \pi$; et si h est impaire¹⁰ : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{h(t)} \cdot dt = \pi/2$.

Par exemple : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{th(t)} \cdot dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{sh(t)} \cdot dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\tan(t)} \cdot dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \cdot dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t} \cdot dt = \pi/2$.

11) Définition des séries de Fourier comme projections orthogonales, calcul des coefficients.

On étend les notations du paragraphe précédent à toutes les fonctions T -périodiques continues par morceaux (on n'a donc plus un vrai produit scalaire) ; étant donnée f une telle fonction :

$$S_n[f] = p_n(f) = (f|e_0) \cdot e_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^n ((f|e_k) \cdot e_k + (f|s_k) \cdot s_k) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(k\omega x) + b_k \cdot \sin(k\omega x)).$$

Ce sont les sommes partielles, notées $S_n[f]$, de la série de Fourier de f , notée quant à elle $S[f]$. (Attention, la somme infinie n'est pas une projection orthogonale, car même les éléments de F_∞ doivent être des combinaisons finies d'une famille génératrice).

- *Remarque* : Si les deux suites (a_n) et (b_n) sont décroissantes et convergent vers 0, alors la série de terme général $(a_n \cdot \cos(n\omega x) + b_n \cdot \sin(n\omega x))$ converge pour tout réel $x \notin T \cdot \mathbb{Z}$ (cf. ch. A §10) ; pour $x \in T \cdot \mathbb{Z}$, il faut en plus que la série de terme général a_n converge. De même, si la série de terme général $|a_n| + |b_n|$ converge, alors la série de terme général $(a_n \cdot \cos(n\omega x) + b_n \cdot \sin(n\omega x))$ converge aussi pour tout réel x . (On appelle cette convergence « normale » car on a remplacé les fonctions trigonométriques par leurs bornes supérieures).

Lemme de Cantor (hors programme) : S'il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, sur lequel $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$ converge, alors les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0.

- *Preuves* : Comme $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{in\theta/2} \cdot \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$, on a :

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \cdot \cos(k\omega t) \right| \leq a_m \cdot \left| \sum_{k=m}^n \cos(k\omega t) \right| = a_m \cdot \left| \sum_{k=0}^n \cos(k\omega t) - \sum_{k=0}^m \cos(k\omega t) \right|, \text{ d'où :}$$

$|S_n - S_m| \leq a_m \cdot |(\sin((n+1)\omega t/2)\cos(n\omega t/2) - \sin((m+1)\omega t/2)\cos(m\omega t/2))/\sin(\omega t/2)| \leq 2 \cdot a_m / |\sin(\omega t/2)|$. Si $\sin(\omega t/2)$ n'est pas nul, alors la série initiale converge ; il reste donc à traiter le cas $\sin(\omega t/2) = 0$, c'est-à-dire : $t = kT$; la série est alors égale à $\sum a_n$, il est donc nécessaire que cette série converge^{iv}.

La seconde affirmation est une évidence car : $|a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)| \leq |a_n| + |b_n|$.

- *Corollaires* : Si la suite (a_n) est décroissante et converge vers 0, alors la série de terme général $a_n \cdot e^{in\omega t}$ converge pour tout réel $t \notin T \cdot \mathbb{Z}$

Le critère spécial des séries alternées est aussi un corollaire de cette propriété, sous la forme $\sum a_n \cdot \cos(n\pi)$.

En identifiant les coefficients on obtient : En notant $\omega = 2\pi/T$,

¹⁰ Elle ne peut pas être paire car elle est équivalente à t en 0.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (\text{valeur moyenne de } f \text{ sur une période}) ;$$

$$\text{Pour } n \geq 1 : \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Avec évidemment la série de Fourier de f : $S[f](x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega x) + b_n \cdot \sin(n\omega x))$.

- *Remarques* : • On peut aussi intégrer de $-T/2$ à $T/2$, ou sur toute période de α à $\alpha + T$. On peut aussi parfois calculer plus rapidement : $a_n + ib_n$.

• Il a par ailleurs été vu au chapitre A, à propos des séries géométriques, que la série de Fourier diverge si $a_n \geq 1$ ou si $b_n \geq 1$, à partir d'un certain rang. (Cf. le lemme de Cantor).

• On ne peut pas dériver comme on le faisait avec les séries entières ; à titre d'exemple : $\sum \sin(nt)/n$ converge mais $\sum \cos(nt)$ diverge en général.

• En notant $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et θ_n tel que $\cos(\theta_n) = a_n/r_n$ et $\sin(\theta_n) = b_n/r_n$, on a alors (pour $b_0 = 0 \Rightarrow r_0 = |a_0|$ et $\theta_0 = 0$) : $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \cdot \cos(n\omega t - \theta_n)$.

• Il est parfois possible d'obtenir les coefficients de Fourier sans calculer les intégrales. Soit, par exemple :

f 2π -périodique, définie sur $[-\pi, \pi]$ par : $f(x) = -\ln|2 \cdot \sin(x/2)|$; on a vu au chapitre B que : $a_0 = b_n = 0$, $a_n = 1/n$ pour $n \geq 1$.

g 2π -périodique, définie sur $[0, 2\pi]$ par : $g(x) = \ln|2 \cdot \cos(x/2)|$; alors : $a_0 = b_n = 0$, $a_n = (-1)^{n+1}/n$ pour $n \geq 1$.

h 2π -périodique, définie sur $]-\pi, \pi[$ par : $h(x) = x/2$, et $h(\pi) = 0$: $a_n = 0$, $b_n = (-1)^{n+1}/n$.

k 2π -périodique, définie sur $]0, 2\pi[$ par : $k(x) = (\pi - x)/2$, et $k(0) = 0$: $a_n = 0$, $b_n = 1/n$.

Avec en outre : $\ln(1 + e^{i\theta}) = g(x) + i \cdot h(x)$, et : $-\ln(1 - e^{i\theta}) = f(x) + i \cdot k(x)$.

- *Cas particuliers* :

Si f est **impaire** alors $a_n = 0$ pour tout n .

Si f est **paire** alors $b_n = 0$ pour tout n .

- *Remarque* : Une fonction périodique continue par morceaux étant bornée, on peut encadrer les coefficients de Fourier :

$$\text{Si } \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M, \text{ alors : } |a_0| \leq M, |a_n| \leq \frac{4M}{\pi}, |b_n| \leq \frac{4M}{\pi}.$$

- *Preuve* : Pour a_0 on applique seulement les théorèmes de majoration usuel ; si on les applique à a_n , on trouve :

$$|a_n| = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f(t) \cdot \cos(n\omega t)| dt \leq \frac{2M}{T} \int_0^T |\cos(n\omega t)| dt = \frac{M}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(nu)| du \quad (\text{pour } u = \omega t) = n \cdot \frac{M}{\pi} \int_0^{2\pi/n} |\cos(nu)| du =$$

$$\frac{M}{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(v)| dv \quad (\text{pour } v = nu) = \frac{2M}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(v) dv = \frac{4M}{\pi}. \text{ C'est le même calcul pour } |b_n|.$$

- *Exemple* : On utilisera cet exemple dans toute la suite, f 2π -périodique avec : $f(x) = 1 - x$ sur $]-\pi, \pi]$. Alors :

$\omega = 2\pi/T = 1$, donc :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - t) dt = 1 ; \text{ pour } n \geq 1 : a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - t) \cdot \cos(nt) dt = 0 ; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - t) \cdot \sin(nt) dt = \frac{2(-1)^n}{n}.$$

$$S[f](x) = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin(nx)}{n}.$$

12) Théorème de Dirichlet.

Si f est T -périodique et de classe C^1 par morceaux, les sommes de Fourier $S_n[f](x)$ convergent pour tout réel x vers la demi-somme des limites à droite et à gauche au

$$\text{point } x : \boxed{S[f](x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}}.$$

Où l'on a noté : $f(x^-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$, et : $f(x^+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$.

On peut donc aussi écrire : $\lim_{h \rightarrow 0^+} (f(x+h) + f(x-h))/2$, ou plus simplement : $(f(x+0) + f(x-0))/2$.

- *Cas particuliers* : Il s'en suit que si f est continue au voisinage de x alors $S[f](x) = f(x)$. Il existe un cas particulier fréquemment rencontré, quand f est définie sur une période, c'est-à-dire un intervalle semi-ouvert, par une fonction qui, elle, est de classe C^1 sur le fermé correspondant. Par exemple $f(x)$ 2π -périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$; dans ce cas, pour tout $x \in]k\pi, (k+1)\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$) : $S[f](x) = f(x) = (x - k\pi)^2$, et : $S[f](k\pi) = ((-\pi)^2 + \pi^2)/2 = \pi^2$.

- *Remarque* : Dans ces conditions, l'intégrale de f^2 est égale à l'intégrale de $S[f]^2$ sur $[0, T]$ donc : $\|S[f]\| = \|f\|$. Cette égalité appuie, sans la démontrer, la validité de la formule suivante dite « de Parseval ».

- *Exemple* : Pour f 2π -périodique avec : $f(x) = 1 - x$ sur $]-\pi, \pi]$. Alors, si $x \in \mathbb{R}$: On cherche $x_0 \in]-\pi, \pi]$ tel qu'il existe un entier relatif k vérifiant : $x = x_0 + 2k\pi$. Ainsi : $k = -E(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi})$, et :

$$f(x) = f(x_0) = 1 - x_0 = 1 - x - 2\pi \cdot E(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}) = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin(nx)}{n} \text{ pour } x \notin \pi + 2\pi \cdot \mathbb{Z}, \text{ d'après le théorème de Dirichlet.}$$

Si $x \in \pi + 2\pi \cdot \mathbb{Z}$, alors $\sin(nx) = 0$, donc : $S[f](x) = 1 = \frac{1}{2} \cdot (f(-\pi^+) + f(\pi^-)) = \frac{1}{2} \cdot ((1 + \pi) + (1 - \pi))$, le théorème de Dirichlet est bien vérifié.

- *Attention* : La fonction f qui vaut 1 sur \mathbb{Q} et 0 sinon admet la série de Fourier nulle. Elle n'est donc égale à sa série de Fourier que sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En outre, la dérivée de la fonction nulle est encore la fonction nulle, tandis que f n'est dérivable nulle part. Il en résulte que : **La dérivée d'une série de Fourier n'est pas nécessairement la série de Fourier de la dérivée.**

13) Formule de Parseval.

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)}$$

- *Remarque 1* : Soit $R_n(f) = S_n(f) - f$ (orthogonal à $S_n(f)$), on a le théorème de Pythagore : $\|f\|^2 = \|R_n\|^2 + \|S_n(f)\|^2$. D'où, si $\|R_n\|$ converge vers 0, on a l'égalité souhaitée ; ce qui est le cas, par exemple, si f est continue. On en déduit, en particulier que la distance entre le sous-espace des fonctions continues et le sous-espace vectoriel engendré par $\text{Vect}(A)$ ($A = (e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \cup (s_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$) est aussi petite qu'on veut, donc nulle ; mais attention, ils ne sont pas égaux car $\text{Vect}(A)$ ne contient que des combinaisons linéaires finies alors qu'une fonction continue est en général une combinaison linéaire infinie des éléments de A .

- *Remarque 2* : En se plaçant dans l'un des espaces préhilbertiens réels, et en opérant avec A_n , qui est une base orthogonale de F_n qu'on peut normaliser ; alors, en écrivant l'inégalité de Bessel-Parseval du §7 :

$$(e_0|f)^2 + \sum_{k=1}^n (\sqrt{2} \cdot e_k|f)^2 + (\sqrt{2} \cdot s_k|f)^2 \leq \|f\|^2 ; \text{ c'est-à-dire : } \|p_n(f)\|^2 = \|S_n[f]\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \|f\|^2.$$

La formule de Parseval donne l'égalité quand n tend vers l'infini (ce qui est bien une conséquence du théorème de Dirichlet quand la fonction est de classe C^1).

- *Remarque 3* : Dans certains cas, cette formule permet d'obtenir de meilleures majorations des coefficients de Fourier que celles qui ont été obtenues précédemment.

- *Remarque 4* : Si on se réfère au chapitre M.4), on constate qu'il s'agit, à une constante multiplicative près, du volume de révolution sur une période de la courbe qui tourne autour de l'axe des abscisses :

$$V = \pi \int_0^T |f(t)|^2 dt = \pi T \cdot (|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\infty (|a_n|^2 + |b_n|^2)).$$

- *Exemple* : Pour f 2π -périodique avec : $f(x) = 1 - x$ sur $]-\pi, \pi]$. Alors :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1-t)^2 dt = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{(-1)^n}{n} \right)^2 \Leftrightarrow 1 + \frac{\pi^2}{3} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

14) Coefficients complexes.

On définit, pour une suite complexe $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, admettant le développement en série de Fourier complexe suivant :

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$$

On peut écrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt - \frac{i}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt = \frac{a_n - ib_n}{2}$, et alors $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

En inversant ces formules : $a_0 = c_0$, et pour $n \neq 0$: $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i \cdot (c_n - c_{-n})$ (où a_n et b_n peuvent être complexes). Et aussi : $c_n = \frac{1}{2} \cdot (a_n - i \cdot b_n)$ et $c_{-n} = \frac{1}{2} \cdot (a_n + i \cdot b_n)$.

- Conditions pour que f soit à valeurs réelles :

$$S[f](x) = c_0 + \sum_{n=1}^\infty ((c_n + c_{-n}) \cdot \cos(n\omega x) + i(c_n - c_{-n}) \cdot \sin(n\omega x)) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty ((a_n \cdot \cos(n\omega x) + b_n \cdot \sin(n\omega x)).$$

La condition est donc que a_n et b_n soient réels, ce qui est réalisé pour $c_{-n} = \bar{c}_n$.

- *Exemple* : Pour f 2π -périodique avec : $f(x) = 1 - x$ sur $]-\pi, \pi]$. Alors :

$$c_0 = a_0 = 1, \text{ et, pour } n \neq 0 : c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1-t) \cdot e^{-int} dt = \frac{(-1)^n i}{n}; \text{ les formules de transformation sont vérifiées.}$$

- *Remarque* : Pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il est plus simple de calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $2c_{-n} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{in\omega t} dt = a_n + i \cdot b_n$.

15) Exemple.

m étant un entier naturel, on cherche les coefficients de Fourier de la fonction 2π -périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par : $f(x) = t^m$. Soit $I_m = 2c_{-n} = a_n + i \cdot b_n$ (pour $n \geq 1$) ; il faut d'abord calculer a_0, I_0 , et I_m en fonction de I_{m-1} , etc..

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^m \cdot dt = \frac{\pi^m(1 + (-1)^m)}{2(m+1)}; \quad I_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \cdot dt = 0; \quad \text{par parties : } I_m = \frac{i\pi^{m-1}(-1)^n((-1)^m - 1)}{n} + \frac{im}{n} \cdot I_{m-1}.$$

On peut aussi calculer $J_m = 2c_n = a_n - i \cdot b_n$ (pour $n \geq 1$) ; le début des calculs est le même :

$$a_0 = c_0 = \frac{\pi^m(1+(-1)^m)}{2(m+1)}, J_0 = 0; \text{ par parties : } J_m = \frac{i\pi^{m-1}(-1)^n(1-(-1)^m)}{n} - \frac{im}{n} J_{m-1}.$$

Il convient ensuite de poser $p = E(m/2)$ et de calculer d'abord, par exemple, J_{2p} ou J_{2p} .

On trouve : $J_{2p} = 2(-1)^n \sum_{k=0}^p \frac{2p(2p-1)\dots(2p-2k)\pi^{2(p-k)}}{n^{2k+2}}$, et : $J_{2p+1} = \frac{2i\pi^{2p}(-1)^n}{n} - \frac{i(2p+1)J_{2p}}{n}$; J_m est l'un des deux selon la parité de p .

16) Polynômes orthogonaux (exercices).

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On assimile les polynômes formels et les fonctions polynômiales, et on considère la base canonique $B = (1, X, \dots, X^n, \dots)$. (Le polynôme 1 est donc assimilé à la fonction constante $(x \rightarrow 1)$, et le polynôme X est assimilé à $\text{id}_{\mathbb{R}}$).

- *Sujet général de concours* : Maroc 2000 Math 2 (m006t2e, m006i2e).

a) *Polynômes de Legendre*¹¹. Pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$, Montrer que la famille $(L_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale, avec : $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (X^2 - 1)^n$ (Plus généralement, on peut montrer en intégrant par parties que $(L_n|Q) = 0$ pour tout polynôme Q de degré strictement inférieur à n); et que la famille $(\sqrt{n+1/2} \cdot L_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ est l'orthonormalisée de la base B . Montrer que, si $n \geq 2$: $(n+1) \cdot L_{n+1}(X) - (2n+1)X \cdot L_n(X) + n \cdot L_{n-1}(X) = 0$ (établir que $(2n+1)XL_n - (n+1)L_{n+1}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n). Montrer finalement que L_n vérifie l'équation différentielle : $(X^2 - 1) \cdot L_n''(X) + 2X \cdot L_n'(X) - n(n+1) \cdot L_n(X) = 0$ (appliquer la formule de Leibniz à : $((X^2 - 1)(X^2 - 1)^{n-1})'$), et à : $(n(X^2 - 1)'(X^2 - 1)^{n-1})'$).

- *Sujets de concours* : CCP 1997 TPC (m97px1e, m97pcuea), Maroc 2003 Math 2 (m036p2e, m036i2e).

b) *Polynômes de Tchebychev*¹² de 1^{ère} espèce. Pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} P(x)Q(x)dx$, Montrer que la famille $(T_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale, avec : $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$; et que $(\sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ est l'orthonormalisée de la base B (faire le changement de variable $x = \cos(\theta)$ dans l'intégrale en n'oubliant pas de préciser le signe de $\sin(\theta)$). Montrer que si $n \geq 2$: $(1-X^2) \cdot T_n''(X) - X \cdot T_n'(X) + n^2 \cdot T_n(X) = 0$.

- *Sujets de concours* : EIA 1998 (m98zt1e, m984auea), Centrale 2002 Math 1 (m02ct1e, m02ci1e), Centrale 2005 Math 1 (m05ct1e, m05ci1e).

c) *Polynômes de Tchebychev* de 2^{ème} espèce. Pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} P(x)Q(x)dx$, Montrer que la famille $(U_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale, avec : $U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$; et que $(\sqrt{\frac{2}{\pi}} U_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ est l'orthonormalisée de la base B . Montrer que si $n \geq 2$: $(1-X^2) \cdot U_n''(X) - 3X \cdot U_n'(X) + n(n+2) \cdot U_n(X) = 0$. (Dans tout l'exercice : $\theta \neq k\pi$).

d) *Montrer que* : $T_{n+1}(X) - 2X \cdot T_n(X) + T_{n-1}(X) = U_{n+1}(X) - 2X \cdot U_n(X) + U_{n-1}(X) = 0$; et qu'on a en outre :

$$T_m \circ T_n = T_n \circ T_m = T_{mn}; U_n(X) = \sum_{k=0}^n T_k(X) \cdot X^{n-k}.$$

¹¹ Adrien Marie Legendre : 1752-1833.

¹² Pafnuti Livovic Tchebychev : 1821-1894.

e) *Généralisation des polynômes de Legendre* : Soit $(P|Q) = \int_a^b P(x)Q(x)dx$, et $P_n = \frac{d^n}{dx^n}((X-a)(X-b))^n$; montrer que c'est une famille orthogonale et que, moyennant la normalisation, c'est l'orthonormalisée de B. Montrer que P_n vérifie l'équation différentielle : $((X-a)(X-b)P')' = n(n+1)P$ qui, par ailleurs, n'admet pas d'autre solution que $k.P_n$ (k réel et n entier naturel, quelconques). Montrer, enfin, qu'il existe une relation de récurrence du type : $\alpha_n P_{n+1} + (X + \beta_n)P_n + \gamma_n P_{n-1} = 0$, où (α_n) , (β_n) et (γ_n) sont des suites réelles (on ne demande pas de les calculer, bien que ça soit possible).

f) *Autres familles orthogonales* :

Polynômes d'Hermite¹³ physiques : Pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x).e^{-x^2} dx$, relation de récurrence :

$$H_{n+1} = 2X.H_n - 2n.H_{n-1}.$$

Polynômes d'Hermite probabilistes : Pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x).e^{-x^2/2} dx$, relation de récurrence : $H_{n+1} = X.H_n - n.H_{n-1}$.

Polynômes de Laguerre¹⁴ : Pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_0^{\infty} P(x)Q(x).e^{-x} dx$, relation de récurrence :

$$(n+1).L_{n+1} = (2n+1-X).L_n - n.L_{n-1}.$$

Polynômes de Laguerre généralisés : Pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_0^{\infty} P(x)Q(x).x^\alpha e^{-x} dx$, relation de récurrence : $(n+1).L_{n+1} = (2n+1+\alpha-X).L_n - (n+\alpha).L_{n-1}$.

Polynômes de Gegenbauer¹⁵ : Pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2} dx$, relation de récurrence :

$$(n+1).G_{n+1} = (2n+\alpha)X.G_n + (1-2\alpha-n).G_{n-1}.$$

Polynômes de Jacobi¹⁶ : Pour le produit scalaire $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, relation de récurrence :

$$2(n+1)(n+1+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta).J_{n+1} = (2n+1+\alpha+\beta)((2n+\alpha+\beta)(2n+2+\alpha+\beta).X + \alpha^2 - \beta^2).J_n - 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+2+\alpha+\beta).J_{n-1}.$$

17) Formule de la médiane, identité du parallélogramme, théorème d'Apollonius (hors programme).

Formule de la médiane : $\forall (u, v) \in E^2, \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

Identité du parallélogramme : La somme des carrés des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses deux diagonales. (C'est un énoncé équivalent à la formule de la médiane au point qu'on peut les confondre en une seule proposition possédant les deux noms).

Il en va de même du Théorème d'Apollonius¹⁷ : Dans un triangle ABC, A' étant le milieu de [BC] : $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + BC^2/2$. La somme des carrés des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses deux diagonales.

¹³ Charles Hermite : 1822-1901.

¹⁴ Edmond Nicolas Laguerre : 1834-1886.

¹⁵ Leopold Gegenbauer : 1849-1903.

¹⁶ Carl Gustav Jacob Jacobi : 1804-1851.

¹⁷ Apollonius de Perge : III^e et II^e siècle avant J.-C.

- *Remarque* : Toute norme sur E vérifiant la formule de la médiane est associée à un produit scalaire^{vi} ; c'est donc une norme euclidienne^{vii}.

- *Cas général* : Si $ABCD$ est un quadrilatère quelconque, et D' le point tel que $ABCD'$ soit un parallélogramme, alors : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + DD'^2$.

Soit A', B', C' les points tels que $A'BCD$, $AB'CD$ et $ABC'D$ soient aussi des parallélogrammes. Alors :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{D'D}.$$

18) Inégalité de Bessel-Parseval¹⁸ (*hors programme*).

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de E et J une partie finie de I ; alors :

$$\sum_{i \in J} (e_i | u)^2 \leq \|u\|^2.$$

- *Preuve* : C'est évident en dimension finie d'après une proposition précédente. Si E est de dimension infinie, il possède une base mais un vecteur donné u ne s'exprime que comme combinaison linéaire finie d'éléments de cette base. Il suffit ensuite de considérer une famille orthonormale contenant à la fois la famille (e_i) et une famille orthonormale telle que l'union des deux engendre un sous-espace vectoriel de dimension finie contenant u . La fin de la démonstration est triviale.

19) Produit vectoriel.

On se place dans l'espace euclidien orienté $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et d'une base canonique orthonormale directe $B = (e_1, e_2, e_3)$.

a) Généralités.

- *Définition* : Le produit vectoriel est l'unique application bilinéaire antisymétrique de E^2 dans E telle que : $f(e_1, e_2) = e_3$, $f(e_2, e_3) = e_1$ et $f(e_3, e_1) = e_2$.

- *Preuve* : Toute application bilinéaire antisymétrique de E^2 sur E est complètement déterminée par : $f(e_1, e_2)$, $f(e_2, e_3)$ et $f(e_3, e_1)$ car avec la bilinéarité et l'antisymétrie d'une application f on obtient :

$$f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) f(e_1, e_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) f(e_3, e_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) f(e_2, e_3).$$

Cette détermination est unique si, en plus : $(f(e_1, e_2), f(e_2, e_3), f(e_3, e_1))$ est une famille libre. Il s'en suit que le produit vectoriel est la seule application bilinéaire antisymétrique de E^2 sur E telle que : $f(e_1, e_2) = e_3$, $f(e_2, e_3) = e_1$ et $f(e_3, e_1) = e_2$.

- *Propriétés* : $\forall (u, v) \in E^2$, $u \perp (u \wedge v)$ et $v \perp (u \wedge v)$, si u et v sont non nuls $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe, et : $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{u, v})|$.

- *Preuves* : Avec les coordonnées de $u: (a, b, c)$ et $v: (x, y, z)$ on obtient $u \wedge v: (bz - cy, cx - az, ay - bx)$, d'où $(u \wedge v | u) = (u \wedge v | v) = 0$. On utilise ensuite la définition du cosinus qui ne dépend pas de l'orientation choisie : $\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\widehat{u, v}) = (u | v) = ax + by + cz$ d'où l'on déduit l'égalité $\|u\| \cdot \|v\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{u, v})} = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2}$ d'où l'on peut écrire finalement après calcul de l'expression : $\|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\widehat{u, v})| = \sqrt{a^2 y^2 + a^2 z^2 + b^2 x^2 + b^2 z^2 + c^2 x^2 + c^2 y^2 - 2abxy - 2acxz - 2bcyz} = \sqrt{(bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2} = \|u \wedge v\|$.

- *Produit mixte* : $\forall (u, v, w) \in E^3$ le produit mixte de u, v et w est noté (u, v, w) , et on a les égalités :

$$(u, v, w) = (u \wedge v | w) = (u | v \wedge w) = \det(u, v, w). \text{ On a en outre : } (u \wedge v) \wedge (u \wedge w) = (u, v, w) \cdot u.$$

- *Preuve* : Avec les coordonnées $u: (a, b, c)$, $v: (\alpha, \beta, \gamma)$, $w: (x, y, z)$, on obtient après avoir effectué les trois calculs séparément le résultat commun : $(u, v, w) = a\beta z + b\gamma x + c\alpha z - a\gamma y - b\alpha z - c\beta x$.

¹⁸ Friedrich Wilhelm Bessel : 1784-1846. Marc Antoine Parseval des Chênes : 1755-1836.

- **Proposition** : Si un triplet $A = (u, v, w)$ de vecteurs dont l'un au moins est non nul vérifie les trois égalités suivantes : $u \wedge v = w$, $v \wedge w = u$ et $w \wedge u = v$, alors A est une base orthonormale directe.

- **Preuve** : Par définition, si l'un est nul les deux autres aussi, donc aucun n'est nul. Comme w est orthogonal à u et v , u est orthogonal à v et w , v est orthogonal à u et w , alors (u, v, w) est une base orthogonale qui plus est directe. Les valeurs absolues des sinus des vecteurs pris deux à deux valent donc 1, ce qui signifie que : $\|w\| = \|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\|$, $\|v\| = \|w \wedge u\| = \|u\| \cdot \|w\|$ et $\|u\| = \|v \wedge w\| = \|v\| \cdot \|w\|$, d'où l'on déduit facilement (par substitution) que les trois vecteurs sont unitaires.

b) Conservation du produit vectoriel.

- **Proposition** : Les seules applications de E dans E conservant le produit vectoriel ($f(u) \wedge f(v) = u \wedge v$) sont id_E et $-\text{id}_E$.

- **Preuve** : On a $f(e_1) \wedge f(e_2) = e_1 \wedge e_2 = e_3 \Rightarrow f(e_1) \perp e_3$ et $f(e_2) \perp e_3$; de même $f(e_2) \wedge f(e_3) = e_2 \wedge e_3 = e_1 \Rightarrow f(e_2) \perp e_1$ et $f(e_3) \perp e_1$; enfin $f(e_3) \wedge f(e_1) = e_3 \wedge e_1 = e_2 \Rightarrow f(e_1) \perp e_2$ et $f(e_3) \perp e_2$. Il s'en suit que $f(e_1)$ est colinéaire à e_1 , $f(e_2)$ est colinéaire à e_2 , $f(e_3)$ est colinéaire à e_3 et ils ne sont pas nuls; par conséquent, formant deux à deux des angles droits, on a $\|f(e_1)\| \cdot \|f(e_2)\| = \|f(e_1)\| \cdot \|f(e_3)\| = \|f(e_2)\| \cdot \|f(e_3)\| = 1$, d'où ils sont unitaires donc $f(e_1) = \pm e_1$, $f(e_2) = \pm e_2$, $f(e_3) = \pm e_3$, et pour avoir les égalités initiales il n'y a que deux solutions : soit trois signes « + », soit trois signes « - ». Il reste à montrer que f est linéaire; pour tout triplet de vecteurs u, u', v et tout réel α , on a les égalités suivantes : $f(\alpha \cdot u) \wedge f(v) = \alpha \cdot u \wedge v = \alpha \cdot (u \wedge v) = \alpha \cdot f(u) \wedge f(v) \Rightarrow (f(\alpha \cdot u) - \alpha \cdot f(u)) \wedge f(v) = 0_E$; en remplaçant v par les vecteurs de la base, on montre que $f(\alpha \cdot u) - \alpha \cdot f(u) = 0_E$ car il ne peut pas sinon être colinéaire à trois directions distinctes. On démontre de la même façon que la somme est aussi vérifiée : $f(u + u') - f(u) - f(u') = 0_E$. Il s'en suit que les deux seules applications linéaires convenables sont id_E et $-\text{id}_E$.

- **Propriété** : Soit f une application de E dans E telle que pour tout couple (u, v) de vecteurs on ait l'égalité : $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$; alors f possède les propriétés suivantes :

$$\det(f(u), f(v), f(w)) \cdot f(u) = f(\det(u, v, w) \cdot u).$$

$$f(0_E) = 0_E.$$

f transforme toute base orthonormale directe en une base orthonormale directe (d'où $\|u\| = 1 \Rightarrow \|f(u)\| = 1$).

$$\forall u \in E \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R}, u \neq 0_E \Rightarrow f(\alpha \cdot u) \in \text{Vect}(f(u)) \text{ (d'où } f(-e_i) = \varepsilon \cdot f(e_i) \text{ pour } i \in \{1, 2, 3\} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1).$$

$$\forall (u, v) \in E^2, \|u\| = \|v\| \Rightarrow \|f(u)\| = \|f(v)\|.$$

$$\exists \phi \text{ fonction réelle : } \forall u \in E \text{ unitaire et } \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha \cdot u) = \phi(\alpha) \cdot f(u) \text{ (} \Rightarrow \phi(0) = 0, \phi(1) = 1 \text{ et } \phi(-1) = -1).$$

$$\text{En outre : } \phi(\alpha\beta) = \phi(\alpha)\phi(\beta). \text{ Donc : } \forall u \in E \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha \cdot u) = \phi(\alpha) \cdot f(u).$$

$$f \text{ est impaire et pour tout réel positif } x \text{ et tout rationnel } r \text{ (sauf } x = r = 0) : \phi(x^r) = \phi(x)^r.$$

Si f est continue au voisinage d'un vecteur unitaire donné, elle est continue partout; alors ϕ est continue et il existe un réel a tel que pour tout réel positif x : $\phi(x) = x^a$. (Si $x < 0$ alors $\phi(x) = -(-x)^a$).

Si $a = 1$ alors f est linéaire et si f est linéaire alors c'est une rotation.

- **Preuves** : La première propriété provient du fait que $f((u \wedge v) \wedge (u \wedge w)) = f(u \wedge v) \wedge f(u \wedge w) = (f(u) \wedge f(v)) \wedge (f(u) \wedge f(w))$. Ensuite, pour tout vecteur u on a $f(0_E) = f(u \wedge 0_E) = f(u) \wedge f(0_E)$, d'où $f(0_E)$ est orthogonal à lui-même ce qui implique qu'il est nul. L'image d'une base orthonormale directe est une base orthonormale directe car elle vérifie les conditions de la proposition du a). Il s'en suit qu'étant donné un vecteur non nul u , on peut construire une base orthonormale directe (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = u/\|u\|$. On a les égalités successives suivantes : $f(\alpha \cdot u) = f(\alpha \|u\| \cdot u_1) = f(\alpha \|u\| \cdot u_2 \wedge u_3) = f(\alpha \|u\| \cdot u_2) \wedge f(u_3) = f(u_2 \wedge \alpha \|u\| \cdot u_3) = f(u_2) \wedge f(\alpha \|u\| \cdot u_3)$, d'où l'on déduit que $f(\alpha \cdot u)$ est orthogonal à la fois à $f(u_2)$ et $f(u_3)$ ce qui signifie qu'il est colinéaire à $f(u_1)$; il s'en suit qu'il est aussi colinéaire à $f(u)$. En outre, comme ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux, les valeurs absolues des sinus des angles valent 1 d'où l'on déduit : $\|f(\alpha \cdot u)\| = \|f(\alpha \|u\| \cdot u_2) \wedge f(u_3)\| = \|f(\alpha \|u\| \cdot u_2)\|$ car $f(u_3)$ est unitaire. Il s'en suit que si l'on considère un second vecteur non nul v , il existe un vecteur u_2 à la fois orthogonal à u et v d'où : $\|f(\alpha \cdot v)\| = \|f(\alpha \|v\| \cdot u_2)\|$. Si $\|u\| = \|v\|$ alors $\|f(\alpha \cdot u)\| = \|f(\alpha \cdot v)\|$ il suffit ensuite de poser $\alpha = 1$ pour avoir le résultat (qui est encore plus évident si les deux vecteurs sont égaux au vecteur nul). En outre : $f(-e_i) = \varepsilon \cdot f(e_i)$, avec le même ε pour les trois à cause de la conservation de l'orientation. Par ailleurs, en construisant la fonction ϕ sur un vecteur donné unitaire e_1 , pour tout vecteur unitaire u non colinéaire à e_1 il existe un vecteur unitaire e_2 colinéaire à $u \wedge e_1$. Alors : $f(\alpha \cdot e_1) = \phi(\alpha) \cdot f(e_1)$, et on a : $f(e_1) \wedge f(\alpha \cdot e_2) = f(\alpha \cdot e_1) \wedge f(e_2) = \phi(\alpha) \cdot f(e_1) \wedge f(e_2)$, et comme $f(\alpha \cdot e_2) = k \cdot f(e_2)$ on en déduit alors que $k = \phi(\alpha)$, c'est-à-dire $f(\alpha \cdot e_2) = \phi(\alpha) \cdot f(e_2)$; en appliquant le même procédé à e_2 et u on montre que $f(\alpha \cdot u) = \phi(\alpha) \cdot f(u)$. Il est évident que $\phi(1) = 1$ mais $\phi(-1) = -1$ car la base indirecte $(-e_1, -e_2, -e_3)$ doit avoir pour image une base indirecte. En outre, u et v étant deux vecteurs unitaires non colinéaires :

$$\phi(\alpha)\phi(\beta) \cdot f(u) \wedge f(v) = \phi(\alpha) \cdot f(u) \wedge \phi(\beta) \cdot f(v) = f(\alpha \cdot u) \wedge f(\beta \cdot v) = f(\alpha \cdot u \wedge \beta \cdot v) = f(\alpha \beta \cdot u \wedge v) = f(\alpha \beta \cdot u) \wedge f(v) = \phi(\alpha \beta) \cdot f(u) \wedge f(v),$$

d'où : $\phi(\alpha\beta) = \phi(\alpha)\phi(\beta)$. Il s'en suit que si u est un vecteur non nul quelconque, on peut écrire :

$$f(\alpha \beta \cdot u / \|u\|) = \phi(\alpha \beta) \cdot f(u / \|u\|) = \phi(\alpha)\phi(\beta) \cdot f(u / \|u\|) = \phi(\alpha) \cdot f(\beta u / \|u\|),$$

et pour $\beta = \|u\|$, on obtient : $f(\alpha \cdot u) = \phi(\alpha) \cdot f(u)$; ça reste vrai si u est nul. En outre f est impaire car $f(-\alpha) = f(-1 \cdot \alpha) = f(-1) \cdot f(\alpha) = -f(\alpha)$. Pour tout rationnel non nul r , si x est nul alors l'égalité est triviale.

Soit x un réel strictement positif; on montre par récurrence que pour tout entier naturel n : $\phi(x^n) = \phi(x)^n$.

C'est vrai pour $n = 0$ de façon évidente, on suppose donc que c'est vrai au rang n . Alors :

$$\phi(x^{n+1}) = \phi(x \cdot x^n) = \phi(x) \phi(x^n) = \phi(x)^{n+1}.$$

On a ensuite : $1 = \phi(1) = \phi(x^n \cdot x^{-n}) = \phi(x^n)\phi(x^{-n}) = \phi(x)^n\phi(x^{-n})$ d'où $\phi(x^{-n}) = \phi(x)^{-n}$. De même si n est non nul : $\phi(x) = \phi((x^{1/n})^n) = \phi(x^{1/n})^n$, d'où : $\phi(x^{1/n}) = \phi(x)^{1/n}$.

En combinant toutes ces propriétés on arrive à la propriété pour tout rationnel r : $\phi(x^r) = \phi(x)^r$.

Si f est continue au voisinage d'un vecteur unitaire donné alors ϕ est continue en 1. Alors :

$$\forall \epsilon' > 0, \exists \eta' > 0 \text{ tel que } |\alpha - 1| < \eta' \Rightarrow |\phi(\alpha) - 1| < \epsilon'.$$

Soit $x_0 > 0$ donné et $\epsilon = \epsilon'\phi(x_0)$; alors; pour $\eta = \eta'x_0$ et $\alpha = x/x_0$, on a : $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(x_0)| < \epsilon$.

Il s'en suit que ϕ est continue sur $]0, +\infty[$.

Pour la continuité en 0, il suffit de considérer l'image de la suite 2^{-n} qui est $\phi(2)^{-n}$ et qui converge vers 0. Comme ϕ est continue sur $]0, +\infty[$ alors f est continue sur E . Par suite, pour tout réel $x > 0$ et tout réel $a > 0$: $\phi(x^a) = \phi(x)^a$. Ainsi, pour tout réel x strictement positif on peut écrire $\phi(x) = x^a$ avec $a = \ln(\phi(e))$ car $\phi(x) = \phi(e^{\ln(x)}) = \phi(e)^{\ln(x)} = e^{\ln(\phi(e))\ln(x)} = x^{\ln(\phi(e))}$.

Si $a = 1$, alors ϕ est l'identité et : $f(\alpha.u) = \alpha.f(u)$ pour tout réel α et tout vecteur u .

Si u et v sont deux vecteurs colinéaires alors : $f(u + v) = f(u) + f(v)$, car $v = k.u$ (ou le contraire) et ainsi :

$$f((1 + k).u) = (1 + k).f(u) = f(u) + k.f(u) = f(u) + f(v).$$

On suppose donc que u et v sont deux vecteurs non colinéaires ; alors pour tout couple de réels (α, β) on a l'égalité suivante :

$$f(u + v) - f(u) - f(v) \wedge f(\alpha.u + \beta.v) = 0_E.$$

C'est en effet égal à :

$$f(u + v) \wedge f(\alpha.u + \beta.v) - f(u) \wedge f(\alpha.u + \beta.v) - f(v) \wedge f(\alpha.u + \beta.v) = f((u + v) \wedge (\alpha.u + \beta.v)) - f(u \wedge (\alpha.u + \beta.v)) - f(v \wedge (\alpha.u + \beta.v)) = f((\beta - \alpha).(u \wedge v)) - f(\beta.(u \wedge v)) - f(\alpha.(v \wedge u)) = 0_E.$$

Or, en faisant varier α et β on obtient au moins deux directions différentes car on sait que deux vecteurs orthogonaux ont des images orthogonales. Comme le seul vecteur colinéaire à deux directions distinctes est 0_E alors $f(u + v) - f(u) - f(v) = 0_E$, d'où f est linéaire. En conclusion, une application linéaire de l'espace qui transforme une base orthonormale directe en base orthonormale directe est une rotation.

- **Conclusion** : f est entièrement déterminée par l'image de la boule unité et la fonction ϕ ; en outre, l'image de la boule unité est donnée par la restriction d'une rotation, tandis que si ϕ est continue c'est une fonction puissance. En notant U la boule unité et R la restriction de f à U qui est aussi la restriction d'une rotation d'axe dirigé par un vecteur non nul e et d'angle θ ($R = R_{e,\theta}$) et a un réel positif tel que si $x > 0$: $\phi(x) = x^a$ (et $\phi(-x) = -\phi(x)$), alors pour $u \neq 0_E$: $f(u) = \phi(\|u\|).R(u/\|u\|)$, d'où : $f(u) = \|u\|^{a-1}.R(u)$.

ⁱ Commençons par **la norme** ; il faut montrer que : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|\|x\| - \|a\|\| < \epsilon$. C'est évident pour $\eta = \epsilon$ avec la seconde forme de l'inégalité triangulaire.

Avec **la loi externe** on a aussi besoin d'une norme produit : $\|(\lambda, x)\| = \sqrt{\lambda^2 + \|x\|^2}$; d'où $\|(\lambda, x) - (k, a)\| = \|(\lambda - k, x - a)\| < \eta \Rightarrow \sqrt{(\lambda - k)^2 + \|x - a\|^2} < \eta \Rightarrow |\lambda - k| < \eta$ et $\|x - a\| < \eta \Rightarrow \|\lambda.x - k.a\| = \|\lambda.(x - a) + (\lambda - k).a\| \leq |\lambda|. \|x - a\| + |\lambda - k|. \|a\| < (\eta + |\lambda - k|)\eta + \eta \|a\|$. Il suffit donc de choisir η tel que : $\eta^2 + (\eta + \|a\|)\eta = \epsilon$; $\eta = (\sqrt{(\eta + \|a\|)^2 + 4\epsilon} - |\lambda - k| - \|a\|)/2$ convient. Le produit externe est donc continu.

Pour **l'addition** : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\|(x, y) - (a, b)\| < \eta = \epsilon/2 \Rightarrow \|(x - a, y - b)\| < \epsilon/2 \Rightarrow \sqrt{\|x - a\|^2 + \|y - b\|^2} < \epsilon/2 \Rightarrow \|x - a\| < \epsilon/2$ et $\|y - b\| < \epsilon/2 \Rightarrow \|(x + y) - (a + b)\| \leq \|x - a\| + \|y - b\| < \epsilon$. L'addition est donc continue.

Pour **le produit scalaire** : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\|(x, y) - (a, b)\| < \inf\{1, \eta\} \Rightarrow \|(x|y) - (a|b)\| = |(x - a|y) + (a|y - b)| \leq \|x - a\|. \|y\| + \|a\|. \|y - b\|$ grâce à l'inégalité triangulaire et celle de Cauchy-Schwarz ; donc : $|(x|y) - (a|b)| < \eta(\|y\| + \|a\|)$ et comme $\|y\| < \|b\| + 1$, on obtient le résultat pour $\eta = \epsilon/(\|a\| + \|b\| + 1)$. (Remarque : on a deux démonstrations interchangeables pour la loi externe et le produit scalaire).

En ce qui concerne **une application linéaire** f ; soit un vecteur quelconque a , alors : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| = \|f(x - a)\| < \epsilon$. Soit $y = x - a$; alors si f est continue en 0 : $\|y\| < \eta \Rightarrow \|f(y)\| < \epsilon$; donc la continuité de f en 0_E est équivalente à la continuité sur tout entier. Si E est de dimension finie et que f n'est pas l'application nulle pour laquelle c'est trivial, soit une base orthonormale $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $y = y_1.e_1 + y_2.e_2 + \dots + y_n.e_n$: $\|y\| < \eta \Rightarrow |y_i| < \eta$ pour tout i . Soit M un majorant des $\|f(e_i)\|$. Pour $\eta = \epsilon/nM$, on obtient $\|f(y)\| \leq |y_1|. \|f(e_1)\| + |y_2|. \|f(e_2)\| + \dots + |y_n|. \|f(e_n)\| < n\eta M = \epsilon$, d'où la continuité de f .

C'est à peu près la même démonstration pour les applications bilinéaires, en remplaçant $f(x, y) - f(a, b)$ par $f(x - a, y) + f(a, y - b)$ (cf. le produit scalaire).

Par ailleurs, les formes linéaires du type de la proposition sont continues car le produit scalaire l'est.

Enfin, si on montre que $(M \mapsto A_k M^k)$ est continue, en sommant des fonctions de ce type on aura prouvé la proposition : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que : $\|M - M_0\| < \eta \Rightarrow \|A_k M^k - A_k M_0^k\| = \|A_k\|. \|M - M_0\|. \|M^{k-1} + M^{k-2} M_0 + \dots + M M_0^{k-2} + M_0^{k-1}\|$; et comme $\|M\| < \|M_0\| + \eta$, on choisit $\eta \leq \|M_0\|$, et ainsi : $\|M^{k-1} + M^{k-2} M_0 + \dots + M M_0^{k-2} + M_0^{k-1}\| < k.2^{k-1} \|M_0^{k-1}\|$. Par suite : $\eta = \inf\{\|M_0\|, \epsilon/(k.2^{k-1} \|A_k\|)\}$ convient.

ⁱⁱ Étant donné un réel $\epsilon > 0$ et le prolongement f_k sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, il existe un entier naturel non nul n tel que, en notant $M_{k,i}$ le maximum de f_k sur l'intervalle $I_{k,i} = [x_k + i.(x_{k+1} - x_k)/n]$ (pour $0 \leq i \leq n$) et $m_{k,i}$ son minimum, alors : $|M_{k,i} - m_{k,i}| < \epsilon$. Il suffit de poser : $\phi(x) = m_{k,i}$ et $\psi(x) = M_{k,i}$.

Proposition voisine : Soit f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et un réel quelconque $\epsilon > 0$, alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle : $\forall x \in [a, b], |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$.

- **Preuve** : Étant donné un réel $\epsilon > 0$ et le prolongement f_k sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, il existe un entier naturel non nul n tel que, en notant $M_{k,i}$ le maximum de f_k sur l'intervalle $I_{k,i} = [x_k + i.(x_{k+1} - x_k)/n]$ (pour $0 \leq i \leq n$) et $m_{k,i}$ son minimum, alors : $|M_{k,i} - m_{k,i}| < \epsilon$. Il suffit de poser : $\phi(x) = (M_{k,i} + m_{k,i})/2$ sur $I_{k,i}$.

ⁱⁱⁱ L'ensemble des fonctions T-périodiques de classe C^k par morceaux, de classe C^k à gauche aux points de discontinuité (respectivement à droite) est un espace préhilbertien réel (les fonctions continues en sont un cas particulier).

Il faut au passage définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux : Étant donnée ϕ continue par morceaux sur $[a, b]$ selon la subdivision adaptée $S = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, on note ϕ_k le prolongement par continuité de ϕ au segment $[x_k, x_{k+1}]$ pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Alors :

$$\int_a^b \phi(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_k(t) dt.$$

Par exemple, soit : $\{f(x) = x \text{ si } x \neq 1, f(1) = 3\}$, et : $\{g(x) = x \text{ si } x \neq 2, g(2) = 0\}$; alors : $\int_0^3 f(t) dt = \int_0^3 g(t) dt = \int_0^3 t dt = 9/2$.

Il existe un autre espace préhilbertien réel, celui des fonctions T-périodiques continues par morceaux vérifiant la condition de Dirichlet : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (f(t) + f(t^+))/2$ (les fonctions continues en sont un cas particulier).

^{iv} Autre démonstration : Soit $S_n = \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx)$; alors : $2.S_n \cdot \sin(x/2) = \sum_{k=1}^n b_k (\cos((2k-1)x/2) - \cos((2k+1)x/2)) =$

$b_1 \cos(x/2) - b_n \cos((2n+1)x/2) + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \cos((2k+1)x/2)$; Si x est congru à 0 modulo 2π , la série initiale est nulle et la convergence est évidente. Sinon, comme b_n tend vers 0 alors la limite de S_n existe dès lors que la série de terme général $(b_{k+1} - b_k) \cos((2k+1)x/2)$ converge. Mais cette série converge absolument car :

$|(b_{k+1} - b_k) \cos((2k+1)x/2)| \leq b_{k+1} - b_k$ qui est positif par hypothèse et est le terme général d'un télescopage.

On fait exactement la même démonstration avec les cosinus car : $2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(kx) = \sin((2k+1)x/2) - \sin((2k-1)x/2)$.

^v Notons plus simplement $S_n(x)$ la somme de Fourier de variable x , et remplaçons les coefficients de Fourier par leur expression intégrale :

$S_n(x) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(k\omega x) \cos(k\omega t) + \sin(k\omega x) \sin(k\omega t)) \right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\omega(t-x)) \right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \frac{\sin((2n+1)\omega(t-x)/2)}{2 \cdot \sin(\omega(t-x)/2)} dt$ (en passant par la somme des exponentielles complexes). Cette dernière expression de $S_n(x)$ s'appelle : intégrale de Dirichlet. Par un simple changement de variable, la convergence de cette intégrale se ramène à celle de l'intégrale $\frac{2}{T} \int_0^T f(x+t) \frac{\sin((2n+1)\omega t/2)}{2 \cdot \sin(\omega t/2)} dt$, et par soustraction de f , comme on

a : $\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin((2n+1)\omega t/2)}{\sin(\omega t/2)} dt = 1$ (en revenant aux cosinus) : $S_n(x) - f(x) = \frac{1}{T} \int_0^T (f(x+t) - f(x)) \frac{\sin((2n+1)\omega t/2)}{\sin(\omega t/2)} dt$ doit tendre vers 0.

Pour x donné, en notant $\phi(t) = (f(x+t) - f(x))/\sin(\omega t/2)$, l'intégrale : $I_n = \int_{\eta}^{T-\eta} \phi(t) \sin((n+1/2)\omega t) dt$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

En intégrant par parties, on arrive à : $I_n = \frac{-1}{(n+1/2)\omega} [\phi(t) \cos((n+1/2)\omega t)]_{\eta}^{T-\eta} + \frac{1}{(n+1/2)\omega} \int_{\eta}^{T-\eta} \phi'(t) \cos((n+1/2)\omega t) dt$. Si M est un majorant de $|\phi|$ et $|\phi'|$ alors : $|I_n| \leq (2+T)M/n\omega$, d'où la convergence vers 0.

Il reste à établir la convergence sur les deux intervalles $[0, \eta]$ et $[T-\eta, T]$. Le second se traitant sur le même mode que le second, on ne fera la démonstration que pour le premier ; comme f est continue, et du fait que la limite quand y tend vers 0 de $\sin(y)/y$ vaut 1, on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $|t| < \eta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < 1/n(2n+1)$ et $\left| \frac{\sin((2n+1)\omega t/2)}{\sin(\omega t/2)} \right| < (2n+1)(1+1/n)$, d'où l'inégalité suivante :

$\left| \int_0^{\eta} (f(x+t) - f(x)) \frac{\sin((2n+1)\omega t/2)}{\sin(\omega t/2)} dt \right| < \int_0^{\eta} ((2n+1)(1+1/n)/n(2n+1)) dt = \eta(1/n + 1/n^2)$ qui tend bien vers 0. Ceci achève la démonstration.

^{vi} Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace normé. Un espace normé réel dont la norme vérifie la formule de la médiane est donc préhilbertien.

^{vii} Soit les applications f et g définies par : $f(x, y) = (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)/4$, et : $g(x, y, z) = f(x, y+z) - f(x, y) - f(x, z)$ pour tout triplet $(x, y, z) \in E^3$. On a : $8 \cdot g(x, y, z) = 2(\|x+y+z\|^2 - \|x-y+z\|^2) - 2(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - 2(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2)$; d'où, en réunissant les termes : $g(x, y, z) = 2(\|x+y+z\|^2 - \|x-y+z\|^2) - 2(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - 2(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2)$. Il ne reste plus qu'à appliquer la formule de la médiane : $g(x, y, z) = \|2x+z\|^2 + \|2x-z\|^2 + 2(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2)$. On remarque que cette dernière expression ne dépend pas de y ;

d'où : $g(x, y, z) = g(x, 0, z) = -f(x, 0) = (\|x\|^2 - \|x\|^2)/4 = 0$, et on a alors : $f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z)$. L'autre sens est obtenu par symétrie car $f(y, x) = f(x, y)$. On pose ensuite pour y fixé : $h(x) = f(x, y)$; elle vérifie donc $h(x+x') = h(x) + h(x')$. Il s'en suit que pour tout entier naturel n elle vérifie $h(nx) = n \cdot h(x)$, ce qui se démontre très simplement par récurrence. Par suite : $0 = h(0) = h(nx + (-nx))$, d'où l'on déduit $h(kx) = k \cdot h(x)$ pour tout entier relatif k . De même, pour tout entier naturel non nul q on a : $h(x) = h(q \cdot (x/q)) = q \cdot h(x/q)$, d'où l'on déduit que : pour tout rationnel r : $h(rx) = r \cdot h(x)$. Cette propriété étant vraie pour tout rationnel, elle le sera pour tout réel si h est continue. On définira par la suite que c'est le cas si pour tout $x_0 \in E : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x - x_0\| < \eta \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$, c'est-à-dire :

$|f(x, y) - f(x_0, y)| = |f(x - x_0, y)| = \|x - x_0 + y\|^2 - \|x - x_0 - y\|^2 / 4 = \|x - x_0 + y\| \cdot \|x - x_0 - y\| / 4 \leq \|x - x_0 + y\| + \|x - x_0 - y\| / 4 \leq \varepsilon$. Il suffit ensuite d'appliquer l'inégalité triangulaire : $|h(x) - h(x_0)| \leq 2\|x - x_0\| \cdot \|2\|x - x_0\| + 2\|y\| / 4 = \|x - x_0\| \cdot (\|x - x_0\| + \|y\|)$. Sachant que y est fixe, si on pose : $\eta \leq (\sqrt{4\varepsilon + \|y\|} - \|y\|)/2$, on arrive bien à $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$. Il s'en suit que $f(\alpha \cdot x, y) = \alpha \cdot f(x, y)$, et on obtient l'autre côté par symétrie. Ainsi, f est bien une forme bilinéaire symétrique ; il est simple de démontrer qu'elle est définie positive.