

## D) Fiche : Espaces préhilbertiens réels.

$E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni de sa base canonique  $B$ .

### 1) Définition et propriétés d'un produit scalaire.

Un produit scalaire sur  $E$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

L'espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire est un *espace préhilbertien* réel. S'il est de dimension finie, c'est un *espace euclidien*. On note :  $(u|v) = \ll u \text{ scalaire } v \gg$ .

En dimension finie, un tel produit scalaire est défini dans la base canonique par une matrice symétrique :

$$M = \begin{pmatrix} (e_1|e_1) & (e_1|e_2) & \dots & (e_1|e_n) \\ (e_2|e_1) & (e_2|e_2) & \dots & (e_2|e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_n|e_1) & (e_n|e_2) & \dots & (e_n|e_n) \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs s'exprime alors dans cette base par un produit matriciel :  $(u|v) = {}^t u_B M v_B$ .

Deux vecteurs dont le produit scalaire est nul sont dits *orthogonaux* :  $u \perp v \Leftrightarrow (u|v) = 0$ .

Une base dont tous les vecteurs sont orthogonaux deux à deux est une *base orthogonale*.

Un vecteur dont le carré scalaire est égal à 1 est appelé *unitaire* :  $u^2 = (u|u) = 1$ .

Une base orthogonale dont tous les vecteurs sont unitaires est une *base orthonormale*. Dans une telle base la matrice du produit scalaire est la matrice identité :

$$B \text{ orthonormale} \Rightarrow (u|v) = {}^t u_B I v_B = {}^t u_B \times v_B.$$

Alors si  $u : (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$  et  $v : (y_1, y_2, \dots, y_n)_B$ ,  $(u|v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ .

### 2) Définition et propriétés de la norme associée.

L'application  $\| \cdot \|$  définie de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  par  $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$  est la *norme euclidienne*, et elle possède les propriétés suivantes : ( $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  et  $\forall (u, v) \in E^2$ )

$$\|u\| \geq 0.$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E.$$

$$\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \cdot \|u\|.$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (Inégalité triangulaire).}$$

3) Inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\forall (u, v) \in E^2, \boxed{|(u|v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|}.$$

4) Théorème de Pythagore.

$$u \perp v \Leftrightarrow (u|v) = 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

5) Orthogonalité, orthogonal d'une partie non vide, supplémentaire orthogonal, théorèmes usuels.

**Proposition :** Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à une partie non vide  $A$  de  $E$  est noté  $A^\perp$  et appelée : « orthogonal de  $A$  ».

**Proposition :** Si  $A$  est une partie non vide de  $E$  alors  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel.

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors :  $F \cap F^\perp = \{0_E\}$  et  $F \subset F^{\perp\perp}$ .

Si  $F$  est de dimension finie alors  $F = F^{\perp\perp}$  et  $F \oplus F^\perp = E$ .

**Proposition :** En dimension finie, tout sous-espace vectoriel possède un unique supplémentaire orthogonal.

**Théorème de la base orthonormale incomplète :** Étant donnée une famille orthonormale  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$  de l'espace euclidien  $E$ , on peut la compléter en une base orthonormale de  $E$ .

6) Procédé d'orthogonalisation (ou orthonormalisation) de Schmidt.

Soit  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$  ; il existe une unique base orthonormale  $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  telle que pour tout  $k$  compris entre 1 et  $n$  :  $(e_k|e'_k) > 0$  et  $\text{Vect}(e'_1, e'_2, \dots, e'_k) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ .

- *Algorithme :*  $e''_1 = e_1$  ;  $(e''_1, e''_2, \dots, e''_k)$  étant calculés, on pose au rang suivant :

$$e''_{k+1} = \lambda_{k+1,1} \cdot e''_1 + \lambda_{k+1,2} \cdot e''_2 + \dots + \lambda_{k+1,k} \cdot e''_k + e_{k+1}.$$

Les valeurs des  $\lambda_{k+1,i}$  sont obtenues en utilisant les relations d'orthogonalité. On obtient ainsi une base orthogonale  $(e''_1, e''_2, \dots, e''_n)$  ; il ne reste plus ensuite qu'à diviser les vecteurs par leurs normes respectives  $e'_k = \pm e''_k / \|e''_k\|$ , le signe étant déterminé tel que  $(e'_{k+1}|e_{k+1}) > 0$  pour obtenir la base orthonormale souhaitée.

7) Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales. Distance d'un vecteur à un sous-espace.

Soit  $p$  la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$  où  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  est une famille orthonormale ; alors : 
$$p(u) = (u|u_1).u_1 + (u|u_2).u_2 + \dots + (u|u_k).u_k.$$

Si  $s$  est la symétrie associée à  $p$ ,  $s = 2p - \text{id}_E$ , alors  $s$  est une symétrie orthogonale :

$$s(u) = 2((u|u_1).u_1 + (u|u_2).u_2 + \dots + (u|u_k).u_k) - u.$$

La distance de  $u$  au sous-espace  $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$  est alors :

$$d(u, F) = \|u - p(u)\|.$$

**Proposition :**  $d(u, F) = \inf\{d(u, w), w \in F\}$ .

Soit  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  une base orthonormale de  $F$  qu'on complète pour former une base orthonormale de tout l'espace, à savoir :  $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Alors :

$$v = u - p(u) = (u|u_{k+1}).u_{k+1} + (u|u_{k+2}).u_{k+2} + \dots + (u|u_n).u_n.$$

En remarquant au passage que  $u = p(u) + v$  et  $s(u) = p(u) - v$ , alors  $v$  est la projection orthogonale de  $u$  sur  $F^\perp$  et :

$$d(u, F) = \sqrt{(u|u_{k+1})^2 + (u|u_{k+2})^2 + \dots + (u|u_n)^2}.$$

8) Méthode des moindres carrés.

Soit  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  une suite de points du plan, et  $\Delta: (y = ax + b)$  la droite optimale passant « au plus près » de ces différents points (droite de régression).

Dans  $E = \mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire canonique et d'une base orthonormale canonique  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , soit les trois vecteurs :  $u: (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $v: (1, 1, \dots, 1)$  et  $w: (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . En notant  $F = \text{Vect}(u, v)$  et  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ , on obtient une distance minimale pour :

$$p(w) = a.u + b.v,$$

d'où l'on déduit les valeurs de  $a$  et  $b$  en calculant :

$$(w - p(w)|u) = (w - p(w)|v) = 0.$$

9) Définition des limites et de la continuité d'une fonction d'un espace préhilbertien dans un autre.

Étant donnés  $E$  et  $F$  deux espaces préhilbertiens réels,  $U$  une partie de  $E$  et l'application  $f: U \rightarrow F$ . Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in U, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon)$$

$f$  continue en  $a \in U \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . (On remplace  $b$  par  $f(a)$  dans la formule précédente).

$f$  est continue sur une partie  $A$  de  $U$  si et seulement si elle est continue en tout point de  $A$ .

Lorsqu'il n'y a pas de problèmes la limite d'une somme d'un produit, d'un quotient ou d'une composée est égale respectivement à la somme, au produit, au quotient ou à la composée des limites. Mais **attention**, on ne peut faire des produits ou des quotients que lorsque l'espace d'arrivée le permet. Exemples, si  $E = F = \mathbb{R}$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 3x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 + \lim_{x \rightarrow a} 3x = a^2 + 3a ; \lim_{x \rightarrow a} x^2 \cdot \sin(x) = (\lim_{x \rightarrow a} x^2)(\lim_{x \rightarrow a} \sin(x)) = a^2 \cdot \sin(a) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos(x)/(x^2+1) = (\lim_{x \rightarrow a} \cos(x))/(\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 1)) = \cos(a)/(a^2 + 1).$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\sin(2x^2 - 1)) = \sin(\lim_{x \rightarrow a} (2x^2 - 1)) = \sin(2a^2 - 1). \text{ Etc...}$$

Si deux fonctions sont continues, il en est de même de leur somme, leur produit, leur quotient (à condition de ne pas annuler le dénominateur), et de leur composée (avec les précautions d'usage quant aux points où les fonctions doivent être continues). Comme dans le cas des limites, on ne peut faire des produits ou des quotients que lorsque l'espace d'arrivée le permet.

#### 10) Fonctions continues par morceaux.

Une fonction numérique  $f$  définie sur  $[a, b]$  est continue par morceaux si et seulement s'il existe une subdivision  $S = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  (avec  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ ), telle que  $f$  soit continue sur tout intervalle  $]x_k, x_{k+1}[$  (pour  $k = 0$  à  $n - 1$ ), et qu'elle admette des limites finies à droite en  $x_k$  et à gauche en  $x_{k+1}$  ; on dit que la subdivision  $S$  est *adaptée* à  $f$ .

Une fonction numérique  $f$  définie sur un intervalle quelconque  $I$  est continue par morceaux sur  $I$  si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout intervalle fermé borné inclus dans  $I$ .

Une fonction définie sur  $[a, b]$  est de classe  $C^1$  par morceaux s'il existe une subdivision  $S$  telle que la restriction de  $f$  à tout intervalle  $]x_k, x_{k+1}[$  de la subdivision est prolongeable en une fonction de classe  $C^1$  sur  $[x_k, x_{k+1}]$ .

Une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  est  $T$ -périodique ( $T > 0$ ) si :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$ . Le réel  $T$  est une période de  $f$  ; la plus petite période strictement positive est *la période fondamentale*.

**Proposition** : Une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  est bornée sur  $[a, b]$ .

- *Proposition* : Soit  $f$  est une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  et un réel quelconque  $\varepsilon > 0$ , alors il existe deux fonctions  $\phi$  et  $\psi$  en escalier sur  $[a, b]$  telles que :

$$\forall x \in [a, b], 0 \leq \psi(x) - \phi(x) \leq \varepsilon \text{ et } \phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x).$$

L'ensemble des fonctions continues et  $T$ -périodiques sur  $\mathbb{R}$  est un espace préhilbertien réel.

Une fonction  $T$ -périodique est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  si elle est continue par morceaux sur une période.

$$\text{Avec : } \boxed{(f|g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t)dt}$$

**Proposition** : Soit  $A = (e_n)_{n \in \mathbb{N}} \cup (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , où  $e_n(t) = \cos(2n\pi t/T)$  et  $s_n(t) = \sin(2n\pi t/T)$  ; cette famille est orthogonale (et libre car 0 est exclu). En outre, seul  $e_0$  est unitaire, tous les autres sont de norme  $1/\sqrt{2}$ .

### 11) Définition des séries de Fourier comme projections orthogonales, calcul des coefficients.

Soit  $F_n = \text{Vect}((e_k)_{k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}} \cup (s_k)_{k \in \{1, 2, \dots, n\}})$ , et  $f$  une fonction  $T$ -périodique continue par morceaux ; en notant  $p_n$  la projection orthogonale sur  $F_n$  et  $\omega = 2\pi/T$  :

$$p_n(f) = (f|e_0) \cdot e_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^n ((f|e_k) \cdot e_k + (f|s_k) \cdot s_k) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(k\omega x) + b_k \cdot \sin(k\omega x)).$$

Ce sont les sommes partielles, notées  $S_n[f]$ , de la série de Fourier de  $f$ , notée quant à elle :  $S[f]$ .

En identifiant les coefficients on obtient :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt} ;$$

$$\text{Pour } n \geq 1 : \boxed{a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt} ;$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt}.$$

(On peut aussi intégrer de  $-T/2$  à  $T/2$ ).

- *Cas particuliers* :

Si  $f$  est **impaire** alors  $a_n = 0$  pour tout  $n$ .

Si  $f$  est **paire** alors  $b_n = 0$  pour tout  $n$ .

### 12) Théorème de Dirichlet.

Si  $f$  est  $T$ -périodique et de classe  $C^1$  par morceaux, les sommes de Fourier  $S_n[f](x)$  convergent pour tout réel  $x$  vers la demi-somme des limites à droite et à gauche au

$$\text{point } x : \boxed{S[f](x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}}.$$

Il s'en suit que si  $f$  est continue au voisinage de  $x$  alors  $S[f](x) = f(x)$ .

13) Formule de Parseval.

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

14) Coefficients complexes.

$$S[f](x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \text{ avec } c_n = \frac{1}{2} \cdot (a_n - i \cdot b_n) \text{ et } c_{-n} = \frac{1}{2} \cdot (a_n + i \cdot b_n)$$