Devoir surveillé 3

(durée : 3 heures, sans calculatrice)

Exercice 1 (8 points)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - (x+1)y = x+1$ sur $\mathbb{R}$ avec la condition $y(0) = 1$.
2. $2x(1-x)y' + (1-x)y = \sqrt{x}$ sur $]0,1[$.

Exercice 2 (12 points)
k étant un nombre *réel* fixé, on cherche les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathcal{E}_k) : \ y'' - 2ky' + (k^2+1)y = \sin t + te^{kt}$$

On appelle $(\mathcal{F}_k)$ et $(\mathcal{G}_k)$ les équations différentielles :

$$(\mathcal{F}_k) : \ y'' - 2ky' + (k^2+1)y = \sin t$$

$$(\mathcal{G}_k) : \ y'' - 2ky' + (k^2+1)y = te^{kt}$$

1. Résoudre l'équation homogène $(\mathcal{H}_k)$ associée à l'équation $(\mathcal{E}_k)$.
2. On suppose dans cette question que $k = 0$.
   Déterminer une solution particulière y_1 de l'équation différentielle $(\mathcal{F}_0)$.
3. On suppose dans cette question que $k \neq 0$.
   Déterminer une solution particulière y_1 de l'équation différentielle $(\mathcal{F}_k)$.
4. Déterminer une solution particulière y_2 de l'équation $(\mathcal{G}_k)$.
5. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_k)$ suivant les valeurs de k.

Exercice 3 (12 points)
Dans cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Les coordonnées des points et des vecteurs se rapportent à ce repère.
On note :
$\mathcal{D}'$ la droite passant par O et dirigée par $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$,
$\mathcal{D}$ la droite donnée par le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$,
$\mathcal{Q}$ le plan d'équation $y + z = 0$
Enfin, pour tout réel m, $\mathcal{P}_m$ est le plan d'équation $x + my - mz = 1$.

1. Donner un vecteur normal $\overrightarrow{n_m}$ de $\mathcal{P}_m$, ainsi qu'un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Vérifier que tous les plans $\mathcal{P}_m$ contiennent la droite $\mathcal{D}$.
2. Calculer $\overrightarrow{r_m} = \overrightarrow{n_m} \wedge \vec{a}$. En déduire que $\mathcal{D}'$ n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}_m$. On appelle alors $\mathcal{R}_m$ l'unique plan contenant $\mathcal{D}'$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$. Obtenir une équation cartésienne de $\mathcal{R}_m$.
3. Déterminer, pour tout réel m, les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de I_m, point d'intersection des plans $\mathcal{P}_m, \mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}_m$.

4. On note $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2 = x$ et Ω le point de $\mathcal{Q}$ de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$. Préciser la nature géométrique de $\mathcal{S}$, ainsi que les éléments géométriques qui le caractérisent.
5. Vérifier que I_m appartient à $\mathcal{S}$, puis que I_m appartient à un cercle (indépendant de m) dont on donnera le centre et le rayon.

Exercice 4 (8 points)
On considère l'arc paramétré défini par :

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) + 3\cos(2t) + \cos(3t) \\ y(t) = 3\sin(t) + 3\sin(2t) + \sin(3t) \end{cases}$$

On note Γ la courbe représentative.

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions x et y
   Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
2. Montrer que :

   $$x'(t) = -6\sin(2t)(1+\cos t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 6\cos(2t)(1+\cos t)$$

   On pourra, au cours du calcul, exprimer $\cos(3t)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin(3t)$ en fonction de $\sin t$ à l'aide des formules de Moivre.
3. Dresser le tableau de variations de x et y.
   Montrer que Γ présente un point stationnaire et étudier l'existence d'un vecteur tangent en ce point.
4. Tracer la courbe Γ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Correction du devoir 3

Correction de l'exercice 1

1. L'équation différentielle peut s'écrire :

$$(\mathcal{E}): \; y' - (x+1)y = x+1$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
L'équation homogène associée est :

$$(\mathcal{H}): \; y' - (x+1)y = 0$$

La solution générale de $(\mathcal{H})$ est :

$$\begin{aligned} y_{\mathcal{H}} &= \lambda e^{\int (x+1)dx} \\ &= \lambda e^{\frac{1}{2}x^2+x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On remarque que $y_0 = -1$ est une solution particulière évidente de $(\mathcal{E})$, donc la solution générale de $(\mathcal{E})$ est :

$$y = \lambda e^{\frac{1}{2}x^2+x} - 1 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

La condition $y(0) = 1$ impose : $\lambda e^{\frac{1}{2}0^2+0} - 1 = 1$, donc $\lambda = 2$. La solution de l'équation différentielle est donc :

$$\boxed{y = 2e^{\frac{1}{2}x^2+x} - 1}$$

2. L'équation différentielle peut s'écrire :

$$(\mathcal{E}): \; y' + \frac{1}{2x}y = \frac{\sqrt{x}}{2x(1-x)} \quad \text{car } x \in]0,1[, \text{ donc } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée est :

$$(\mathcal{E}): \; y' + \frac{1}{2x}y = 0$$

La solution générale de $(\mathcal{H})$ est :

$$\begin{aligned} y_{\mathcal{H}} &= \lambda e^{-\int \frac{1}{2x}dx} \\ &= \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln(|x|)} = \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln(x)} \quad \text{car } x > 0 \\ y_{\mathcal{H}} &= \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On recherche une solution particulière y_0 de $(\mathcal{E})$ (en utilisant la méthode dite « de variation de la constante ») sous la forme : $y_0 = \dfrac{\lambda(x)}{\sqrt{x}}$. On a :

$$y_0' + \frac{1}{2x}y_0 = \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{x}}$$

Ce qui amène $\lambda'(x) = \dfrac{x}{2x(1-x)} = \dfrac{1}{2(1-x)}$, et donc, comme $1-x > 0$ sur $]0,1[$:

$$\lambda(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x) \; (+C^{te})$$

Ainsi $y_0 = \dfrac{-\frac{1}{2}\ln(1-x)}{\sqrt{x}}$ est une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
La solution générale de $(\mathcal{E})$ sur $]0,1[$ est :

$$\boxed{y = \frac{\lambda - \frac{1}{2}\ln(1-x)}{\sqrt{x}} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

Correction de l'exercice 2

k est un paramètre réel. On note :

$$(\mathcal{E}_k) : \; y'' - 2ky' + (k^2+1)y = \sin t + te^{kt}$$
$$(\mathcal{F}_k) : \; y'' - 2ky' + (k^2+1)y = \sin t$$
$$(\mathcal{G}_k) : \; y'' - 2ky' + (k^2+1)y = te^{kt}$$

1. $(\mathcal{H}_k)$ est l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre :
$$y'' - 2ky' + (k^2+1)y = 0$$
L'équation caractéristique associée à $(\mathcal{H}_k)$ est $r^2 - 2kr + (k^2+1) = 0$.
Son discriminant est $\Delta = -4 = (2\mathrm{i})^2$.
Ses racines sont donc $r_1 = k + \mathrm{i}$ et $r_2 = \overline{r_1} = k - \mathrm{i}$. (Ne pas oublier que k est réel).
Les solutions générales (recherchées sur $\mathbb{R}$) de $(\mathcal{H}_k)$ sont donc les fonctions :
$$\boxed{y_{\mathcal{H}_k} = \mathrm{e}^{kt}\,(A\cos t + B\sin t)}$$
avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

2. On suppose dans cette question que $k = 0$.
Déterminer une solution particulière y_1 de l'équation différentielle $(\mathcal{F}_0)$.
$(\mathcal{F}_0)$ est l'équation différentielle du second ordre, linéaire à coefficients constants :
$$y'' + y = \sin t$$
On cherche une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{F}_0') : y'' + y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ dans $\mathbb{C}$ sous la forme $z_1(t) = (\alpha t + \beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. En effet, dans ce cas particulier, le coefficient de l'exponentielle (i) est solution simple de l'équation caractéristique. Le polynôme recherché doit donc être d'un degré $n+1$ par rapport au polynôme du second membre.
$$z_1'(t) = (\mathrm{i}\alpha t + \alpha + \mathrm{i}\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$
$$z_1''(t) = (-\alpha t + 2\mathrm{i}\alpha - \beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$
Alors $z_1'' + z_1 = 2\mathrm{i}\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Ce qui donne par identification :
$$z_1 \text{ est solution de } \mathcal{F}_0' \Leftrightarrow \alpha = \frac{-\mathrm{i}}{2}$$
Donc $z_1 = \dfrac{-\mathrm{i}}{2}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \dfrac{1}{2}t\sin t - \dfrac{\mathrm{i}}{2}t\cos t$ est une solution particulière de $(\mathcal{F}_0')$
Finalement, $\boxed{y_1 = \operatorname{Im} z_1 = -\dfrac{1}{2}t\cos t}$ est une solution particulière de $(\mathcal{F}_0)$.

3. On suppose dans cette question que $k \neq 0$.
   Déterminer une solution particulière y_1 de l'équation différentielle $(\mathcal{F}_k)$.
   On recherche une solution particulière de $(\mathcal{F}'_k)$: $y'' - 2ky' + (k^2+1)y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ dans $\mathbb{C}$, sous la forme $z_1 = \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ (avec $\lambda \in \mathbb{C}$).

$$z_1'(t) = \mathrm{i}\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$
$$z_1''(t) = -\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

   Alors :
$$z_1'' - 2kz_1' + (k^2+1)z_1 = \left[-\lambda - 2\mathrm{i}k\lambda + (k^2+1)\lambda\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

   On résout donc l'équation d'inconnue λ :

$$\begin{aligned} & -\lambda - 2\mathrm{i}k\lambda + (k^2+1)\lambda = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda(k^2 - 2\mathrm{i}k) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda = \frac{1}{k(k-2\mathrm{i})} \\ \Leftrightarrow\ & \lambda = \frac{k+2\mathrm{i}}{k(k^2+4)} \end{aligned}$$

   Donc $z_1 = \dfrac{k+2\mathrm{i}}{k(k^2+4)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est une solution de $(\mathcal{F}'_k)$.
   On en déduit alors que $y_1 = \mathrm{Im}(z_1)$ est une solution particulière de $(\mathcal{F}_k)$.

$$\boxed{y_1 = \mathrm{Im}(z_1) = \frac{k\sin t + 2\cos t}{k(k^2+4)}}$$

4. On recherche une solution particulière de :

$$(\mathcal{G}_k) : \ y'' - 2ky' + (k^2+1)y = t\mathrm{e}^{kt}$$

   sous la forme $y_2(t) = (at+b)\mathrm{e}^{kt}$.

$$y_2'(t) = (kat + a + kb)\mathrm{e}^{kt}$$
$$y_2''(t) = (k^2at + 2ka + k^2b)\mathrm{e}^{kt}$$

   Par identification, on obtient l'équivalence :

$$y_2 \text{ solution de } (\mathcal{G}_k) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

   Donc $\boxed{y_2 = t\mathrm{e}^{kt}}$ est une solution de $(\mathcal{G}_k)$

5. En utilisant le principe de superposition, on en déduit finalement l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_k$:

   (a) Si $k = 0$ $\boxed{y(t) = A\cos t + B\sin t - \frac{1}{2}t\cos t + t}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

   (b) Si $k \neq 0$ $\boxed{y(t) = \mathrm{e}^{kt}(A\cos t + B\sin t) + \frac{k\sin t + 2\cos t}{k(k^2+4)} + t\mathrm{e}^{kt}}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

Correction de l'exercice 3

$\mathcal{D}'$ la droite passant par O et dirigée par $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$,

$\mathcal{D}$ la droite donnée par le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$,

$\mathcal{Q}$ le plan d'équation $y + z = 0$

$\forall m \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_m$ est le plan d'équation $x + my - mz = 1$.

1. Un vecteur normal de $\mathcal{P}_m$ est $\overrightarrow{n_m} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{pmatrix}$

   $\mathcal{D}$ est définie comme l'intersection des plans :

   - P_1 d'équation cartésienne $y - z = 0$ dont un vecteur normal est $n_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   - P_2 d'équation cartésienne $x = 1$ dont un vecteur normal est $n_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   La droite $\mathcal{D}$ admet donc le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ comme vecteur directeur. $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   Le point $A(1, 0, 0)$ (en posant $z = 0$) est un point de la droite $\mathcal{D}$.
   La droite $\mathcal{D}$ peut donc être définie par le point A et le vecteur $\vec{u}$.
   Enfin, pour tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{D}$, comme $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$, on a $M(1, y, y)$, et l'on vérifie que $x + my - mz = 1 + my - my = 1$. Donc $M \in \mathcal{P}_m$.
   La droite $\mathcal{D}$ est donc contenue dans tous les plans $\mathcal{P}_m$. Ce que l'on peut écrire $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_m$.

2. $\overrightarrow{r_m} = \overrightarrow{n_m} \wedge \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ -m-1 \\ -m+1 \end{pmatrix}$.

   Quelque soit le réel m, le vecteur $\overrightarrow{r_m}$ n'est jamais nul, donc $\mathcal{D}'$ n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}_m$.
   On appelle alors $\mathcal{R}_m$ l'unique plan contenant $\mathcal{D}'$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$.
   Le plan $\mathcal{R}_m$ est donc défini par le point O et les vecteurs $\vec{a}$ et $\overrightarrow{n_m}$ (qui sont non colinéaires d'après l'étude précédente).

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{R}_m &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{n_m}, \vec{a}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.(\overrightarrow{n_m} \wedge \vec{a}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2m \\ -m-1 \\ -m+1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2mx - (m+1)y + (1-m)z = 0 \end{aligned}$$

   $\mathcal{R}_m$ admet donc comme équation cartésienne : $\boxed{2mx - (m+1)y + (1-m)z = 0}$

3. Les coordonnées (x, y, z) du point I_m sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + my - mz = 1 \\ 2mx - (m+1)y + (1-m)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z = \dfrac{m}{1+2m^2} \\ x = \dfrac{1}{1+2m^2} \\ z = \dfrac{-m}{1+2m^2} \end{cases}$$

Le point d'intersection des plans $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}_m$ est donc le point $\boxed{I\left(\frac{1}{1+2m^2}, \frac{m}{1+2m^2}, \frac{-m}{1+2m^2}\right)}$

4. $$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 = x &\Leftrightarrow x^2-x+y^2+z^2=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

5. Les coordonnées de I_m vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{S}$. En effet :

   $$\left(\frac{1}{1+2m^2}\right)^2-\frac{1}{1+2m^2}+\left(\frac{m}{1+2m^2}\right)^2+\left(\frac{-m}{1+2m^2}\right)^2=\frac{1+2m^2}{(1+2m^2)^2}-\frac{1}{1+2m^2}=0$$

   Donc $I_m \in \mathcal{S}$.
   I_m appartient donc à $\mathcal{S}$ et à $\mathcal{Q}$. I_m appartient donc à l'intersection du plan et de la sphère.
   Comme Ω appartient à $\mathcal{Q}$ le cercle $\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 4

On considère l'arc paramétré défini par :

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t + 3\cos(2t) + \cos(3t) \\ y(t) = 3\sin t + 3\sin(2t) + \sin(3t) \end{cases}$$

On note Γ la courbe représentative.

1. On a $D_x = D_y = \mathbb{R}$. De plus $\forall t \in \mathbb{R}$:

   $$\begin{cases} x(t+2\pi) = 3\cos(t+2\pi)+3\cos(2t+4\pi)+\cos(3t+6\pi) \\ \qquad = 3\cos(t)+3\cos(2t)+\cos(3t) = x(t) \\ y(t+2\pi) = 3\sin(t+2\pi)+3\sin(2t+4\pi)+\sin(3t+6\pi) \\ \qquad = 3\sin(t)+3\sin(2t)+\sin(3t) = y(t) \end{cases}$$

   Donc x et y admettent une période commune 2π. On peut ainsi réduire le domaine d'étude à $[-\pi,\pi]$. On a également :

   $$\begin{cases} x(-t) = 3\cos(t)+3\cos(-2t)+\cos(-3t) = 3\cos(t)+3\cos(2t)+\cos(3t) = x(t) \\ y(-t) = 3\sin(-t)+3\sin(-2t)+\sin(-3t) = -3\sin(t)-3\sin(2t)-\sin(3t) = -y(t) \end{cases}$$

   Donc l'axe (Ox) est axe de symétrie de la courbe. On peut ainsi réduire le domaine d'étude à $[0,\pi]$.

2. On calcule :
   $$\begin{cases} x'(t) = -3\sin(t)-6\sin(2t)-3\sin(3t) \\ y'(t) = 3\cos(t)+6\cos(2t)+3\cos(3t) \end{cases}$$

Pour factoriser ces deux expressions, exprimons $\cos(3t)$ et $\sin(3t)$ respectivement en fonction de $\cos t$ et $\sin t$ à l'aide de la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}
\cos(3t) + i\sin(3t) &= (\cos t + i\sin t)^3 \\
&= \cos^3 t + 3i\cos^2 t \sin t - 3\cos t \sin^2 t - i\sin^3 t \\
&= \cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t + i(3\cos^2 t \sin t - \sin^3 t) \\
&= \cos^3 t - 3\cos t(1-\cos^2 t) + i(3(1-\sin^2 t)\sin t - \sin^3 t) \\
\cos(3t) + i\sin(3t) &= 4\cos^3 t - 3\cos t + i(3\sin t - 4\sin^3 t)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -3\sin(t) - 6\sin(2t) - 3(3\sin t - 4\sin^3 t) \\
&= -12\sin(t) - 12\sin t\cos t + 12\sin^3 t = 12\sin t(-1-\cos t+\sin^2 t) \\
&= 12\sin t(-\cos t - \cos^2 t) = -12\sin t\cos t(1+\cos t) \\
x'(t) &= -6\sin(2t)(1+\cos t)
\end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}
y'(t) &= 3\cos t + 6\cos(2t) + 3(4\cos^3 t - 3\cos t) \\
&= -6\cos t + 6\cos(2t) + 12\cos^3 t \\
&= 6\cos(2t) + 6\cos t(2\cos^2 t - 1) = 6\cos(2t) + 6\cos t\cos(2t) \\
y'(t) &= 6\cos(2t)(1+\cos t)
\end{aligned}$$

3. Ainsi :

$$\begin{aligned}
x'(t) = 0 &\Leftrightarrow \sin(2t) = 0 \ \text{ ou } \ \cos t = -1 \\
&\Leftrightarrow 2t = 0\,[\pi] \ \text{ ou } t = \pi\,[2\pi] \\
x'(t) = 0 &\Leftrightarrow t = 0\left[\frac{\pi}{2}\right] \ \text{ ou } t = \pi\,[2\pi]
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
y'(t) = 0 &\Leftrightarrow \cos(2t) = 0 \ \text{ ou } \ \cos t = -1 \\
&\Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \ \text{ ou } t = \pi\,[2\pi] \\
y'(t) = 0 &\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right] \ \text{ ou } t = \pi\,[2\pi]
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variations en prenant garde aux signes des fonctions trigonométriques sur ces intervalles :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
x'	0		$-$		0		$+$		0
x	7		$\sqrt{2}$		-3		$-\sqrt{2}$		-1
y	0		$3+2\sqrt{2}$		2		$-3+2\sqrt{2}$		0
y'	$+$		0	$-$			0	$+$	0

On constate l'existence d'un point stationnaire en $t = \pi$, et :

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{6\cos(2t)(1+\cos t)}{-6\sin(2t)(1+\cos t)} = -\mathrm{cotan}(2t) \underset{t\to\pi}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc Γ admet une tangente verticale au point $M(\pi)$ de coordonnées $(-1, 0)$.

4. On construit la courbe Γ à l'aide du tableau et de la symétrie :