

Devoir Surveillé 4

(durée : 3 heures, sans calculatrice)

Exercice 1 (6 points)*Démonstrations par récurrence. Les questions suivantes sont indépendantes.*

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 - \frac{1}{2^n}$.

3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est un multiple de 6.

Exercice 2 (12 points)

On considère le plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, et les points $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$.

À tout réel λ fixé, on associe la courbe \mathcal{C}_λ dont une équation est :

$$x^2 + 4y^2 - 2\lambda x - 4\lambda y + \lambda^2 = 0$$

1. Montrer que \mathcal{C}_λ est une conique, et préciser sa nature. Donner également les coordonnées de son centre Ω_λ , de ses sommets et foyers, son excentricité, et les équations de ses directrices dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Déterminer le(s) valeur(s) de λ pour lesquelles la droite (AB) est tangente à \mathcal{C}_λ (on ne cherchera pas à calculer les coordonnées du point de contact).
3. En précisant la valeur λ choisie, construire la courbe \mathcal{C}_λ de façon à ce que celle-ci soit inscrite dans le triangle (OAB) .

Approximation pouvant s'avérer utile : $\sqrt{5} \simeq 2,24$.

Exercice 3 (8 points)

Soit f la fonction qui à un nombre complexe z associe, lorsque c'est possible :

$$f(z) = \frac{z^2}{z - 2i}$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. (a) Déterminer les racines carrées complexes de $8 - 6i$.
(b) En déduire tous les antécédents de $1 + i$ par f .
3. Soit h un complexe.
Discuter suivant les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f .
4. Déterminer l'image $f(D)$ de D par f .
La fonction f est-elle une application surjective de D dans \mathbb{C} ?

5. f est-elle une application injective de D dans \mathbb{C} ?
6. Soit g l'application définie sur D et à valeurs dans \mathbb{C} et telle que :

$$\forall z \in D, g(z) = |z - 2i|^2 \frac{z^2}{z - 2i} + z^3$$

Soit le plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit Γ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $g(z)$ est un imaginaire pur.

- (a) Soit z un complexe appartenant à D de partie réelle x et de partie imaginaire y .
Trouver la partie réelle et la partie imaginaire de $g(z)$.
Montrer en particulier : $\operatorname{Re}(g(z)) = 2x^3 - 2xy^2 - 4xy$.
- (b) Montrer que Γ est inclus dans la réunion d'une droite Δ et d'une conique \mathcal{C} . Préciser Γ .
- (c) Déterminer la nature de \mathcal{C} . Préciser le centre et les axes de \mathcal{C} .
Déterminer l'excentricité de \mathcal{C} ainsi que les coordonnées de ses foyers dans le repère \mathcal{R} .

Petites Mines 2006

Exercice 4 (6 points)

On considère l'application f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$f(x, y) = (x - 4y, 2x + 3y)$$

1. Démontrer que f est bijective
2. Soit $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y = 1\}$
 - (a) Déterminer $f(\Delta)$
 - (b) Déterminer $f^{-1}(\Delta)$

Correction du Devoir Surveillé 4

Correction de l'exercice 1

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$\ll \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \gg$$

On montre $\mathcal{P}(n)$ par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$

• *Initialisation*

$$\sum_{k=1}^1 \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2!} \text{ donc } \mathcal{P}(1) \text{ est vraie.}$$

• *Hérédité*

On suppose que pour un certain entier $p \in \mathbb{N}^*$ fixé $\mathcal{P}(p)$ est vraie, c'est à dire :

$$\sum_{k=1}^p \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(p+1)!}$$

Montrons $\mathcal{P}(p+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^p \frac{k}{(k+1)!} + \frac{p+1}{(p+2)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(p+1)!} + \frac{p+1}{(p+2)!} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 1 - \frac{p+2}{(p+2)!} + \frac{p+1}{(p+2)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(p+2)!} \end{aligned}$$

Donc on a $\mathcal{P}(p+1)$.

• *Conclusion* Donc par récurrence, on a démontré $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier naturel non nul n .

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

2. Pour tout entier n on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ »

On montre $\mathcal{P}(n)$ par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$

• *Initialisation*

$$u_0 = 1 = 2 - \frac{1}{2^0} \text{ donc } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$

• *Hérédité*

On suppose que pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$ fixé $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est à dire :

$$u_k = 2 - \frac{1}{2^k}$$

Montrons $\mathcal{P}(k+1)$:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{2}u_k + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2^k}\right) + 1 \text{ d'après l'HDR} \\ &= -\frac{1}{2^{k+1}} + 2 \end{aligned}$$

Donc on a $\mathcal{P}(k+1)$.

• *Conclusion* Donc par récurrence, on a démontré $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier naturel n .

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 - \frac{1}{2^n}}$$

3. Pour tout entier n on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $n^3 - n$ est un multiple de 6 »

On montre $\mathcal{P}(n)$ par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$

• *Initialisation*

$0^3 - 0 = 0 = 6 \times 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• *Hérédité*

On suppose que pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$ fixé $\mathcal{P}(p)$ est vraie, c'est à dire :

$$\exists k \in \mathbb{N}, p^3 - p = 6 \times k$$

Montrons $\mathcal{P}(p+1)$:

$$\begin{aligned} (p+1)^3 - (p+1) &= p^3 + 3p^2 + 3p + 1 - p - 1 \\ &= p^3 - p + 3 \times p \times (p+1) \\ &= 6 \times k + 3p(p+1) \text{ d'après l'HDR} \end{aligned}$$

L'entier $p \times (p+1)$ est pair car c'est le produit de deux entiers consécutifs, donc $3 \times p \times (p+1)$ est un multiple de 6.

Donc on a $\mathcal{P}(p+1)$ puisque $(p+1)^3 - (p+1)$ est la somme de deux multiples de 6.

• *Conclusion* Donc par récurrence, on a démontré $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier naturel n .

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n \text{ est un multiple de 6}}$$

Correction de l'exercice 2

On considère le plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, et les points $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$.

À tout réel λ fixé, on associe la courbe \mathcal{C}_λ dont une équation est :

$$x^2 + 4y^2 - 2\lambda x - 4\lambda y + \lambda^2 = 0$$

1.

$$\begin{aligned}
M(x, y) \in \mathcal{C}_\lambda &\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 2\lambda x - 4\lambda y + \lambda^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - \lambda)^2 - \lambda^2 + 4\left(y - \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \lambda^2 + \lambda^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - \lambda)^2 + 4\left(y - \frac{\lambda}{2}\right)^2 = \lambda^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x - \lambda)^2}{\lambda^2} + \frac{\left(y - \frac{\lambda}{2}\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} = 1
\end{aligned}$$

\mathcal{C}_λ est donc une ellipse de centre $\Omega_\lambda \left(\lambda, \frac{\lambda}{2}\right)$, de plus, en notant $a = |\lambda|$ et $b = \frac{|\lambda|}{2}$, on vérifie $a > b$, et l'on note alors $c = \frac{|\lambda|\sqrt{3}}{2}$, ainsi $a^2 = b^2 + c^2$.

Les sommets de \mathcal{C}_λ sont donc : $A_\lambda \left(2\lambda, \frac{\lambda}{2}\right)$, $A'_\lambda \left(0, \frac{\lambda}{2}\right)$, $B_\lambda (\lambda, \lambda)$, $B'_\lambda (\lambda, 0)$.

L'excentricité de \mathcal{C}_λ est $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Enfin, les directrices de \mathcal{C}_λ sont les droites :

$$\Delta : x = \lambda \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{et } \Delta' : x = \lambda \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$$

2. L'équation de (AB) est $x + y - 1 = 0$.

(AB) est tangente à \mathcal{C}_λ si ces deux courbes ont un point d'intersection unique.

Or :

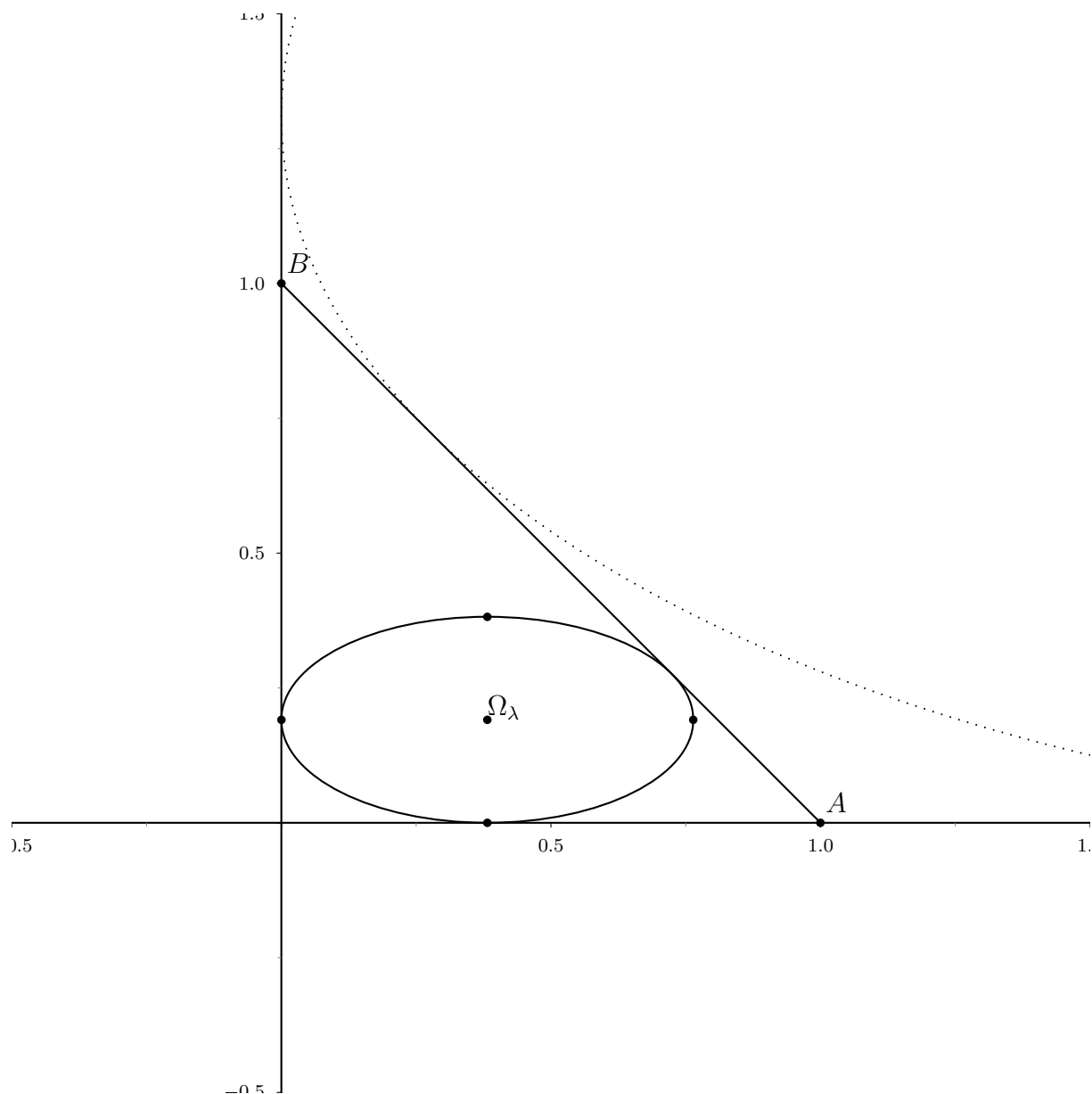
$$\begin{aligned}
M(x, y) \in (AB) \cup \mathcal{C}_\lambda &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 2\lambda x - 4\lambda y + \lambda^2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 5x^2 + (2\lambda - 8)x + 4 + \lambda^2 - 4\lambda = 0 \quad (*) \end{cases}
\end{aligned}$$

Le discriminant de $(*)$ est : $\Delta = -16 \times (\lambda^2 - 3\lambda + 1)$.

(AB) est tangente à \mathcal{C}_λ si et seulement si $\Delta = 0$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ où } \lambda = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

3. On choisit $\lambda = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$



Correction de l'exercice 3 Soit f la fonction qui à un nombre complexe z associe, lorsque c'est possible :

$$f(z) = \frac{z^2}{z - 2i}$$

1.

$$\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$$

2. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on résout $(a + ib)^2 = 8 - 6i$. Ce qui revient au système :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \\ ab < 0 \end{cases}$$

Donc les racines carrées complexes de $8 - 6i$ sont $\boxed{3 - i}$ et $\boxed{-3 + i}$

(b) On résout

$$\begin{aligned} f(z) = 1 + i &\Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 2i} = 1 + i \\ &\Leftrightarrow z^2 - (1 + i)z + 2i(1 + i) = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 8 - 6i = (3 - i)^2$ d'après la question précédente.

Les antécédents de $1 + i$ par f sont donc $\boxed{z_1 = 2}$ et $\boxed{z_2 = -1 + i}$.

3. Soit h un complexe.

Comme précédemment, on résout :

$$\begin{aligned} f(z) = h &\Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 2i} = h \\ &\Leftrightarrow z^2 - hz + 2ih = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = h(h - 8i)$.

Donc :

- Si $h = 0$ ou $h = 8i$ l'équation a une unique solution, donc h a un unique antécédent par f .
- Sinon (si $h \neq 0$ et $h \neq 8i$) l'équation a deux solutions distinctes, donc h admet deux antécédents par f .

De plus, nous remarquons (et c'est très important) que $2i$ n'est jamais solution de cette équation !

4. D'après la question précédente, tout $h \in \mathbb{C}$ admet au moins un antécédent par f dans \mathcal{D} . Donc l'image de \mathcal{D} par f est \mathbb{C} ($f(\mathcal{D}) = \mathbb{C}$) et f est surjective.
5. D'après 2b, $f(2) = f(-1 + i)$ donc f n'est pas injective.
- 6.

$$\forall z \in \mathcal{D}, g(z) = |z - 2i|^2 \frac{z^2}{z - 2i} + z^3$$

Soit le plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit Γ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $g(z)$ est un imaginaire pur.

(a) On peut commencer par simplifier l'expression de g sur \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} g(z) &= |z - 2i|^2 \frac{z^2}{z - 2i} + z^3 \\ &= |z - 2i|^2 \frac{z^2(z - 2i)}{|z - 2i|^2} + z^3 \\ &= z^2(\bar{z} + 2i) + z^3 \\ &= z^2(z + \bar{z} + 2i) \end{aligned}$$

Si l'on note $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im}(z)$ avec $z \in \mathcal{D}$ et donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 2)\}$:

$$\begin{aligned} g(z) &= (x + iy)^2(2x + 2i) \\ &= (x^2 + 2xiy - y^2)(2x + 2i) \\ &= 2((x^3 - 2xy - xy^2) + i(x^2 + 2x^2y - y^2)) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\operatorname{Re}(g(z)) = 2x^3 - 2xy^2 - 4xy}.$$

$$\boxed{\operatorname{Im}(g(z)) = 2x^2 + 4x^2y - 2y^2}.$$

(b) Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(g(z)) = 0 \text{ avec } z \neq 2i \\ &\Leftrightarrow x^3 - xy^2 - 2xy = 0 \text{ avec } (x, y) \neq (0, 2) \\ &\Leftrightarrow x(x^2 - y^2 - 2y) = 0 \\ M \in \Gamma &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - y^2 - 2y = 0 \end{aligned}$$

Γ est donc la réunion de l'axe (Oy) privé du point $(0, 2)$ et de la conique \mathcal{C} d'équation $x^2 - y^2 - 2y = 0$.

(c) Étude de \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 2y = 0 &\Leftrightarrow x^2 - (y^2 + 2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (y^2 + 2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y + 1)^2 - x^2 = 1 \end{aligned}$$

\mathcal{C} est donc l'hyperbole de centre $\Omega(0, -1)$ et d'axe focal (Ω, \vec{j}) .

Son excentricité est $e = \sqrt{2}$, ses foyers sont $F(0, -1 + \sqrt{2})$ et $F'(0, -1 - \sqrt{2})$

Correction de l'exercice 4

On considère l'application f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$f(x, y) = (x - 4y, 2x + 3y)$$

- Pour démontrer que f est bijective, on démontre que l'équation $f(x, y) = (x', y')$ admet une unique solution dans \mathbb{R}^2 .

On a :

$$\begin{aligned} f(x, y) = (x', y') &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = x' \\ 2x + 3y = y' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{11}x' + \frac{4}{11}y' \\ y = \frac{-2}{11}x' + \frac{1}{11}y' \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout couple (x', y') il existe un unique antécédent (x, y) . f est donc bijective et son application réciproque est :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x', y') \mapsto \left(\frac{3}{11}x' + \frac{4}{11}y', \frac{-2}{11}x' + \frac{1}{11}y' \right) \end{cases}$$

- Soit $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y = 1\}$

(a) Par définition :

$$f(\Delta) = \{f(x, y), (x, y) \in \Delta\}$$

Soit $(x, y) \in \Delta$, $x + 2y = 1$ donc $x = 1 - 2y$, avec $y \in \mathbb{R}$, d'où :

$$f(x, y) = (x - 4y, 2x + 3y) = (1 - 6y, 2 - y)$$

Ce que l'on peut noter $f(x, y) = (1, 2) - y \times (6, 1)$.

Finalement, si l'on identifie \mathbb{R}^2 au plan affine rapporté à un repère cartésien, $f(\Delta)$ est la droite passant par le point $(1, 2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(6, 1)$. Cette droite a pour équation cartésienne $x - 6y + 11 = 0$ ce que l'on vérifie aisément avec le déterminant par exemple. Donc :

$$f(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 6y + 11 = 0\}$$

(b) On détermine $f^{-1}(\Delta)$ de la même façon,

$$f^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \in \Delta\}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x, y) \in \Delta &\Leftrightarrow (x - 4y, 2x + 3y) \in \Delta \\ &\Leftrightarrow 5x + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$f^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 5x + 2y - 1 = 0\}$$

Avec l'identification usuelle de \mathbb{R}^2 au plan affine, $f^{-1}(\Delta)$ est la droite d'équation $5x + 2y - 1 = 0$.
