

TSI2 / DS4 - 2009-2010.

CCP 2002 - Mathématiques I (m02pt1e).

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Notations du problème : Soit n un entier naturel non nul, $M_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ un élément de $M_n(\mathbb{R})$; i indique le numéro de la ligne de a_{ij} , j indique le numéro de la colonne de a_{ij} . On appelle trace de A et on note $\text{tr}(A)$ le nombre réel $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$; tA désigne la transposée de la matrice A ; $GL_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées inversibles de $M_n(\mathbb{R})$; I_n désigne la matrice unité d'ordre n ; $S_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques ; $A_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tA = -A$.

PARTIE I.

- 1) Montrer que l'application tr est une application linéaire.
- 2) Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. Est-ce que l'on a $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$? Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- 3) Soit P dans $GL_n(\mathbb{R})$ et A dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$.
- 4) Soit A et B deux matrices semblables. Que peut-on dire de leurs polynômes caractéristiques ? Que représente $\text{tr}(A)$ relativement aux coefficients du polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A ? Retrouver ainsi le résultat de la question 3).
- 5) Existe-t-il des matrices A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = 2I_n$? (Crochet de Lie)
- 6) Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

PARTIE II. Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. On définit $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tA.B)$.

- 1) Montrer que l'application : $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$, est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$. On considèrera l'espace euclidien $(M_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pour toute la suite et $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ la norme associée. On vérifiera que $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.
- 2) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $M_n(\mathbb{R})$.
- 3) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\langle S, A \rangle = 0$. En déduire que $A_n(\mathbb{R}) = (S_n(\mathbb{R}))^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de $S_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.
- 4) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $A = A' + A''$ l'unique décomposition de A selon la somme directe $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. Justifier que $\forall M, M \in S_n(\mathbb{R}), \|A - M\|^2 \geq \|A - A'\|^2$. En déduire que :

$$\inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2 = \left\| \frac{{}^tA - A}{2} \right\|^2.$$

5) Soit f la fonction de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R} définie par $f(x, y, z) = (1 - x)^2 + (4 - z)^2 + (2 - y)^2 + (3 - y)^2$. Montrer que f a un minimum absolu que l'on calculera. On précisera en quel point ce minimum est atteint.

6) Soit A, B, C dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = A{}^tA$ et ${}^tBB = B{}^tB$. Calculer $\|AC - CB\|^2$ et $\|{}^tAC - C{}^tB\|^2$. À l'aide de I.2) vérifier que $\|{}^tAC - C{}^tB\|^2 - \|AC - CB\|^2 = 0$. En déduire que $(AC = CB) \Leftrightarrow ({}^tAC = C{}^tB)$.

PARTIE III. L'objectif de cette partie est d'établir la propriété suivante par récurrence sur n .

$\mathcal{A}(n)$: Soit $\{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ un ensemble de p matrices carrées d'ordre n symétriques permutant 2 à 2 :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, S_i S_j = S_j S_i.$$

Alors il existe une matrice orthogonale Ω d'ordre n telle que $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \Omega^{-1} S_i \Omega$ soit une matrice diagonale.

1) Que peut-on dire de la propriété pour $n = 1$?

2) On suppose que n est supérieur ou égal à 2 et que la propriété est vraie jusqu'au rang $(n - 1)$. Les matrices symétriques S_1, \dots, S_p d'ordre n permutent 2 à 2.

2.1) Que peut-on dire si toutes les matrices S_1, \dots, S_p sont diagonales ?

2.2) On suppose dans toute la suite que S_1 n'est pas une matrice diagonale. Justifier l'existence d'un entier r , d'un réel λ , d'une matrice diagonale Δ d'ordre $n - r$ et d'une matrice orthogonale Ω_1 d'ordre n tels que : $1 \leq r \leq n - 1$,

$$\Omega_1^{-1} S_1 \Omega_1 = \begin{bmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \text{ où } 0 \text{ désigne des blocs nuls et où } \lambda \text{ ne figure pas sur la diagonale de } \Delta.$$

2.3) Pour $1 \leq i \leq p$, on écrit la matrice $\Omega_1^{-1} S_i \Omega_1 = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ D_i & C_i \end{bmatrix}$ sous forme de 4 blocs où A_i est carré d'ordre r et C_i carré d'ordre $n - r$. Montrer que $D_i = {}^t B_i$ et que A_i et C_i sont symétriques.

2.4) Pour $1 \leq i \leq p$, montrer que $S_i S_j = S_j S_i \Leftrightarrow (\lambda B_i = B_j \Delta \text{ et } \Delta C_i = C_j \Delta)$. En déduire que B_i et D_i sont des blocs nuls.

2.5) Montrer que $\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, S_i S_j = S_j S_i \Leftrightarrow (A_i A_j = A_j A_i \text{ et } C_i C_j = C_j C_i)$.

2.6) En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\{A_1, \dots, A_p\}$ et à $\{C_1, \dots, C_p\}$ terminer la démonstration.

3) On considère les deux ensembles de matrices d'ordre deux $\{A_1, A_2, A_3\}$ et $\{C_1, C_2, C_3\}$ définis par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

3.1) Vérifier que ces deux ensembles vérifient l'hypothèse figurant dans $\mathcal{A}(n)$ au début de la partie III et donner un exemple de matrices orthogonales Ω_2 et Ω_2' telles que $\Omega_2^{-1} A_i \Omega_2$ et $(\Omega_2')^{-1} C_i \Omega_2'$ soient des matrices diagonales à préciser.

3.2) Soit les matrices d'ordre 4 écrites par blocs $S_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & C_i \end{bmatrix}$, $1 \leq i \leq 3$. Donner une base orthonormée de \mathbb{R}^4 formée de vecteurs propres communs à S_1, S_2, S_3 et indiquer les valeurs propres correspondantes pour chaque matrice.