

E3) TD : Fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n (troisième partie).

E3.1) (commun) Soit une application f de classe C^2 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et ϕ de $E =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ dans \mathbb{R}^2 définie pour tout couple (ρ, θ) de E par : $\phi(\rho, \theta) = (\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta))$. Soit $g = f \circ \phi$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta)$ en fonction de ρ, θ et des dérivées partielles de f ; puis calculer : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\phi(\rho, \theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi(\rho, \theta))$ en fonction de ρ, θ et des dérivées partielles de g . Vérifier ces formules pour $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- *Corrigé* : ① $J_g[\rho, \theta] = J_f[x, y] \times J_\phi[\rho, \theta]$.

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \cos(\theta) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin(\theta) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = -\rho \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \rho \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) \right) \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{1}{\rho} \cdot \sin(\theta) & \frac{1}{\rho} \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(\theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \frac{\sin(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(\theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) \end{cases}$$

③ $u_1(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $v_1(\rho, \theta) = \cos(\theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \frac{\sin(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta)$ jouent les mêmes rôles que f et g précédemment, de même pour $u_2(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ et $v_2(\rho, \theta) = \sin(\theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta)$, donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) = \cos(\theta) \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \frac{\sin(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) = \sin(\theta) \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) = \cos(\theta) \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \frac{\sin(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) = \sin(\theta) \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \theta}(\rho, \theta) \end{cases} \Leftrightarrow \text{(remarque : } \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \text{, c'est le théorème de Schwarz)}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \cos(\theta) \cdot \frac{\partial(\cos(\theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \frac{\sin(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta))}{\partial \rho} - \frac{\sin(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial(\cos(\theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \frac{\sin(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta))}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \cos(\theta) \cdot \frac{\partial(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta))}{\partial \rho} - \frac{\sin(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta))}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \sin(\theta) \cdot \frac{\partial(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta))}{\partial \rho} + \frac{\cos(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial(\sin(\theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta))}{\partial \theta} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \cos^2(\theta) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) - \frac{2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \rho \partial \theta}(\rho, \theta) + \frac{\sin^2(\theta)}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) + \frac{\sin^2(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \sin(\theta) \cos(\theta) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) + \frac{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \rho \partial \theta}(\rho, \theta) - \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) - \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \frac{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{\rho^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \sin^2(\theta) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) + \frac{2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \rho \partial \theta}(\rho, \theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) - \frac{2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\phi(\rho, \theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi(\rho, \theta)) = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta).$$

⑤ Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$; alors : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$, d'où :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta)) = 2\rho \cdot \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta)) = 2\rho \cdot \sin(\theta). \text{ Finalement :}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) = 2\rho \cdot \cos^2(\theta) + 2\rho \cdot \sin^2(\theta) = 2\rho ; \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = -2\rho^2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta) + 2\rho^2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta) = 0.$$

Comme $g(\rho, \theta) = f(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta)) = \rho^2$, il est normal que $\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) = 2\rho$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = 0$.

On vérifie aussi que : $\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) = 2 + 2 + 0 = 4$ et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\phi(\rho, \theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi(\rho, \theta)) = 2 + 2 = 4, \text{ c'est bien le même résultat.}$$

E3.2) Soit la fonction f sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ telle que $f(x, y) = (\ln\sqrt{x^2 + y^2}, \text{Arctan}(y/x))$; donner la matrice jacobienne de sa réciproque : *a*) en appliquant la formule de la réciproque ; *b*) par calcul direct. En déduire la réciproque de la fonction complexe : $Z = g(z) = e^z$, pour $\Re(z) > 0$.

- *Corrigé* : *a*) $J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow J_f[(x, y)] = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{y}{x^2 + y^2} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$.

On note $f(x, y) = (u, v)$; alors : $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \text{Arctan}(y/x) \in]-\pi/2, \pi/2[$, donc $\cos(v) > 0$. Par suite : $y = x \cdot \tan(v) = \sin(v) \cdot x / \cos(v)$, et comme $x / \cos(v) > 0$, y et v sont de même signe.

On remplace : $u = \ln(\sqrt{x^2(1 + \tan^2(v))}) = \ln(\sqrt{x^2/\cos^2(v)}) = \ln(x/\cos(v))$,

d'où : $x = e^u \cdot \cos(v)$, et donc : $y = e^u \cdot \sin(v)$. Alors : $J_{f^{-1}}[(u, v)] = J_f[(x, y)]^{-1} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u \cdot \cos(v) & -e^u \cdot \sin(v) \\ e^u \cdot \sin(v) & e^u \cdot \cos(v) \end{pmatrix}$.

En notant $R(v)$ la matrice de la rotation d'angle v , alors : $J_{f^{-1}}[(u, v)] = e^u \cdot R(v)$.

b) $f^{-1}(u, v) = (e^u \cdot \cos(v), e^u \cdot \sin(v))$, donc : $J_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial u} & \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial u} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial v} \end{pmatrix} \Rightarrow J_{f^{-1}}[(u, v)] = \begin{pmatrix} e^u \cdot \cos(v) & -e^u \cdot \sin(v) \\ e^u \cdot \sin(v) & e^u \cdot \cos(v) \end{pmatrix}$.

Soit $Z = x + iy = g(z) = g(u + iv) = e^z$, pour $\Re(z) > 0$. Comme $e^{u+iv} = e^u \cdot (\cos(v) + i \cdot \sin(v))$, alors :

$$g^{-1}(Z) = g^{-1}(x + iy) = u + iv = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + i \cdot \text{Arctan}(y/x) = \ln|Z| + i \cdot \text{Arg}(Z), \text{ pour } \text{Arg}(Z) \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

E3.3) Soit A et B deux points distincts du plan euclidien et f une fonction de $]0, +\infty[^2$ dans \mathbb{R} de classe C^1 . On définit la fonction ϕ telle que pour M distinct de A et B : $\phi(M) = f(AM, BM)$; donner son gradient, et la tangente aux courbes suivantes : *a*) $AM + k \cdot BM = \lambda$; *b*) $AM \cdot BM = \lambda$. (k et λ sont des constantes réelles).

- *Corrigé* : Soit $g: M \mapsto (AM, BM)$, alors : $\phi = f \circ g$, donc : $J_\phi[M] = J_f[(AM, BM)] \times J_g[M]$.

$$J_f[(u, v)] = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right), \text{ et : } J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Comme g_1 et g_2 sont similaires, le calcul de l'un donnera le résultat de l'autre :

Pour $M: (x, y)$ et $A: (x_A, y_A)$, on a : $g_1(M) = AM = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$, donc :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(M) = \frac{x - x_A}{AM}, \text{ et : } \frac{\partial g_1}{\partial y}(M) = \frac{y - y_A}{AM}, \text{ d'où : } \frac{\partial g_2}{\partial x}(M) = \frac{x - x_B}{BM}, \text{ et : } \frac{\partial g_2}{\partial y}(M) = \frac{y - y_B}{BM}. \text{ Ainsi : } J_g[M] = \begin{pmatrix} \frac{x - x_A}{AM} & \frac{y - y_A}{AM} \\ \frac{x - x_B}{BM} & \frac{y - y_B}{BM} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors : } J_\phi[M] = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(AM, BM) \quad \frac{\partial f}{\partial v}(AM, BM) \right) \begin{pmatrix} \frac{x - x_A}{AM} & \frac{y - y_A}{AM} \\ \frac{x - x_B}{BM} & \frac{y - y_B}{BM} \end{pmatrix} = \left(\frac{x - x_A}{AM} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(AM, BM) + \frac{x - x_B}{BM} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(AM, BM) \quad \frac{y - y_A}{AM} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(AM, BM) + \frac{y - y_B}{BM} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(AM, BM) \right).$$

$$\text{Finalement : } \text{grad}_\phi[M] = \left(\frac{x - x_A}{AM} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(AM, BM) + \frac{x - x_B}{BM} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(AM, BM) \right) \cdot e_1 + \left(\frac{y - y_A}{AM} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(AM, BM) + \frac{y - y_B}{BM} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(AM, BM) \right) \cdot e_2 =$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(AM, BM) \cdot \left(\frac{x - x_A}{AM} \cdot e_1 + \frac{y - y_A}{AM} \cdot e_2 \right) + \frac{\partial f}{\partial v}(AM, BM) \cdot \left(\frac{x - x_B}{BM} \cdot e_1 + \frac{y - y_B}{BM} \cdot e_2 \right) = \frac{\partial f}{\partial u}(AM, BM) \cdot \overrightarrow{\frac{AM}{AM}} + \frac{\partial f}{\partial v}(AM, BM) \cdot \overrightarrow{\frac{BM}{BM}}.$$

• Application : *a*) Soit $f(u, v) = u + kv - \lambda$, donc : $\phi(M) = AM + k \cdot BM - \lambda = 0$.

$\overrightarrow{\text{grad}}_{\phi}[M] = \frac{\overrightarrow{AM}}{AM} + k \cdot \frac{\overrightarrow{BM}}{BM}$ est orthogonal à la courbe en M , l'équation de la tangente en M_0 est donc donnée par :

$$(\overrightarrow{M_0M} | \overrightarrow{\text{grad}}_{\phi}[M_0]) = 0, \text{ d'où : } \left(\frac{x_0 - x_A}{AM_0} + k \cdot \frac{x_0 - x_B}{BM_0} \right) \cdot (x - x_0) + \left(\frac{y_0 - y_A}{AM_0} + k \cdot \frac{y_0 - y_B}{BM_0} \right) \cdot (y - y_0) = 0.$$

b) Soit $f(u, v) = uv - \lambda$, donc : $\phi(M) = AM \cdot BM - \lambda = 0$.

$\overrightarrow{\text{grad}}_{\phi}[M] = BM \cdot \frac{\overrightarrow{AM}}{AM} + AM \cdot \frac{\overrightarrow{BM}}{BM}$; l'équation de la tangente en M_0 est donc donnée par :

$$(\overrightarrow{M_0M} | \overrightarrow{\text{grad}}_{\phi}[M_0]) = 0, \text{ d'où : } \left(\frac{BM_0}{AM_0} \cdot (x_0 - x_A) + \frac{AM_0}{BM_0} \cdot (x_0 - x_B) \right) \cdot (x - x_0) + \left(\frac{BM_0}{AM_0} \cdot (y_0 - y_A) + \frac{AM_0}{BM_0} \cdot (y_0 - y_B) \right) \cdot (y - y_0) = 0.$$

E3.4) Trouver les applications f de classe C^3 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} telles que : $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0$.

- *Corrigé* : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est une fonction affine de x , où les constantes peuvent dépendre de y :

$\frac{\partial f}{\partial y} = v(y) \cdot x + w(y)$. En notant V et W des primitives respectives de v et w , alors :

$\frac{\partial}{\partial y} (f(x, y) - V(y) \cdot x - W(y)) = 0$, $f(x, y) - V(y) \cdot x - W(y)$ est donc constante selon y mais peut dépendre de x :

$$f(x, y) - V(y) \cdot x - W(y) = U(x) \Rightarrow f(x, y) = U(x) + x \cdot V(y) + W(y).$$

Il faut pouvoir dériver deux fois selon x , donc U est de classe C^2 , tandis que V et W sont de classe C^1 , pour que f soit solution de l'équation aux dérivées partielles ; mais si on veut plus généralement que f soit de classe C^3 , alors U, V et W doivent elles-mêmes être de classe C^3 .