

E) Fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n .

On considère les espaces euclidiens $E = \mathbb{R}^m$ munis d'une base canonique orthonormale et du produit scalaire canonique, où m peut valoir n , p , ou autre selon les cas.

- *Rappels* :

Distance : On appelle distance d associée à une norme $\| \cdot \|$ l'application de E dans \mathbb{R} telle que pour tout couple (u, v) d'éléments de E : $d(u, v) = \|u - v\|$. La distance associée à la norme euclidienne est elle-même appelée : la *distance euclidienne*.

Définition générale : Une application d de E dans \mathbb{R} est une distance si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes pour tout triplet de vecteurs (u, v, w) :

$$d(u, v) \geq 0, \text{ et } d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \text{ (axiome de séparation).}$$

$$d(u, v) = d(v, u) \text{ (axiome de symétrie).}$$

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) \text{ (inégalité triangulaire).}$$

Il est évident qu'une distance associée à une norme vérifie ces propriétés ; elle vérifie même une propriété supplémentaire pour tout scalaire α : $d(\alpha.u, \alpha.v) = |\alpha|.d(u, v)$.

1) Définition des boules ouvertes, boules fermées, ouverts et fermés de $E = \mathbb{R}^n$, propriétés.

Boule ouverte de centre a et de rayon r : $B(a, r) = \{u \in E, d(a, u) < r\}$.

Sphère de centre a et de rayon r : $S(a, r) = \{u \in E, d(a, u) = r\}$.

Boule fermée¹ de centre a et de rayon r : $\bar{B}(a, r) = \{u \in E, d(a, u) \leq r\} = B(a, r) \cup S(a, r)$.

En dimension un, une boule ouverte est un intervalle ouvert et une boule fermée un intervalle fermé ; en dimension deux, une boule ouverte est un disque ouvert, une boule fermée un disque fermé, et une sphère est un cercle.

- *Remarque* : La barre au dessus du \bar{B} des boules fermées sert à désigner l'adhérence. L'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé contenant cet ensemble. L'intérieur d'un ensemble est le plus grand ouvert contenu dans cet ensemble. La frontière d'un ensemble est l'adhérence privée de l'intérieur. Ainsi, l'adhérence d'une boule est la boule fermée, l'intérieur d'une boule est la boule ouverte, la frontière d'une boule est la sphère.

U ouvert de $E \Leftrightarrow U \subset E$ et $\forall a \in U, \exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.

F fermé de $E \Leftrightarrow F \subset E$ et $E \setminus F$ ouvert de E (le complémentaire de F dans E).

F fermé de $E \Leftrightarrow F \subset E$ et $(\forall a \notin F, \exists r > 0$ tel que $B(a, r) \cap F = \emptyset$).

- *Exemples* : Une sphère et une boule fermée sont des fermés. Les sous-espaces vectoriels de E sont des fermés. Une famille finie d'éléments de E est un fermé.

Si $E = \mathbb{R}$, les intervalles ouverts sont des ouverts et les intervalles fermés des fermés. Les ensembles finis, ainsi que \mathbb{N} et \mathbb{Z} sont des fermés tandis que \mathbb{D} et \mathbb{Q} ne sont ni ouverts ni fermés¹.

¹ Il est d'usage de mettre une barre au-dessus d'un ensemble pour désigner ce qu'on appelle : son adhérence ; c'est le plus petit fermé qui le contient.

- Si E est le plan complexe ou le plan \mathbb{R}^2 , les cercles et les disques fermés sont des fermés, les disques ouverts sont des ouverts, les segments fermés sont des fermés tandis que les segments ouverts ne sont ni ouverts ni fermés. Les polygones fermés comme les triangles ou les quadrilatères sont des fermés. L'intérieur d'un polygone est un ouvert et si on lui adjoint sa frontière on en fait un fermé, etc...

- *Preuves* : On ramène la preuve à la boule fermée de centre 0_E et de rayon 1 ; soit a un point extérieur à la boule et $r = (\|a\| - 1)/2$. Alors $B(a, r) \cap \bar{B}(0_E, 1) = \emptyset$ car s'il existe u dans cette intersection alors $\|a\| = \|a - u + u\| \leq \|a - u\| + \|u\| < r + 1 = (\|a\| + 1)/2 \Leftrightarrow \|a\| < 1$ ce qui est exclu. La démonstration concernant la sphère demande de compléter cette preuve avec un point a intérieur, mais le raisonnement est le même avec $r = (1 - \|a\|)/2$.

Soit F un sev de E et x un élément quelconque de $E \setminus F$; soit y la projection orthogonale de x sur F et $r = \|x - y\| > 0$ car y n'est pas égal à x . Par suite, comme r est minimal $B(x, r/2) \cap F = \emptyset$. Il s'en suit que $E \setminus F$ est un ouvert donc F est un fermé.

Propriétés :

E et \emptyset sont à la fois ouverts et fermés.
 Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
 Toute réunion finie de fermés est un fermé.
 Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
 Toute intersection de fermés est un fermé.

- *Preuves* : Ces démonstrations sont simples et utilisent pour certaines d'entre elles les lois de Morgan², à savoir que si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E alors : $E \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (E \setminus A_i)$, et : $E \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (E \setminus A_i)$. Il faut donc prouver ces deux propriétés, ce qui se fait par double inclusion.

- *Remarque* : \emptyset et E sont les deux seuls ensembles à la fois ouverts et fermés, ce sont en outre des boules ouvertes (rayons respectifs 0 et ∞).

- *Exemple important* : Si $E = \mathbb{R}$, $I_n =]-1/n, 1/n[$ et $J_n = [1/n, 1 - 1/n]$ pour tout entier naturel $n \geq 2$; alors les I_n sont des ouverts mais leur intersection infinie vaut $\{0\}$ qui est un fermé, tandis que les J_n sont des fermés dont la réunion infinie vaut $]0, 1[$ qui est un ouvert.

2) Parties bornées.

Partie bornée : A bornée $\Leftrightarrow \exists r > 0$ tel que $A \subset B(0, r) \Leftrightarrow \exists r > 0$ tel que $\forall x \in A, \|x\| < r$.
 A bornée $\Leftrightarrow \exists r \geq 0$ tel que $A \subset \bar{B}(a, r) \Leftrightarrow \exists r \geq 0$ tel que $\forall x \in A, \|x\| \leq r$.

- *Exemples* : Une boule de rayon fini, qu'elle soit ouverte ou fermée est une partie bornée ($B(a, r) \subset B(0_E, \|a\| + r)$). Un sous-espace vectoriel non réduit au vecteur nul n'est pas borné.

- *Proposition* : A est une partie bornée de E si et seulement si $\{\|u\|, u \in A\}$ est une partie bornée de \mathbb{R} .

- *Théorème de recouvrement* (hors programme) :

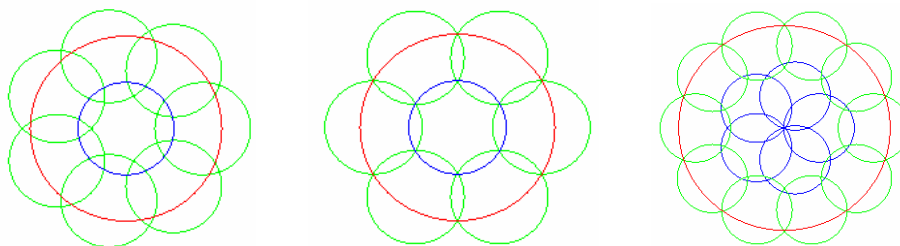
A partie bornée $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset E$ tels que $A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$.

Étant donné un réel $\varepsilon > 0$, toute partie bornée est contenue dans une réunion finie de boules ouvertes de rayon ε .

- *Réciproquement* : Toute partie contenue dans une réunion finie de boules ouvertes (de rayons finis) est bornée.

- *Exemple* : Dans le plan, on veut recouvrir le disque de centre O et de rayon 1 par des disques de rayon $\frac{1}{2}$. La solution suivante nécessite huit petits disques ; le schéma avec seulement sept est-il valideⁱⁱ ? quinze disques suffisent avec des disques de rayon $\frac{1}{3}$; peut-on faire mieux ?

² Augustus de Morgan : 1806-1871.



- **Propriétés** : Tout ensemble fini (dont l'ensemble vide) est borné. Un ensemble inclus dans un ensemble borné est borné. Toute intersection de bornés est bornée ; toute réunion finie de bornés est bornée.

- **Remarque** : Si $E = \mathbb{R}$ et $I_n = [n, n + 1]$, les I_n sont bornés mais leur réunion infinie ne l'est pas.

- **Proposition** : Un sous-espace vectoriel non réduit au vecteur nul n'est pas borné.

- **Preuve** : Soit un vecteur de ce sous-espace $u \neq 0_E$; alors pour tout réel α , $\alpha.u$ est encore dans le sous espace, ce qui a pour conséquence que sa norme : $|\alpha|.||u||$ n'est pas bornée.

3) Dans \mathbb{R} .

Théorème de la borne supérieure : Toute partie non vide et majorée (respectivement minorée) de \mathbb{R} admet une borne supérieure (respectivement inférieure). (La borne supérieure est le plus petit des majorants ; la borne inférieure est le plus grand des minorants).

Axiome d'Archimède³ (*hors programme*) : Quels que soient les réels x et y , $x > 0$ et $y \geq 0$, il existe un entier naturel n tel que $nx \geq y$. (Une conséquence en est l'existence de la fonction « partie entière »).

Théorème des segments emboîtés (*hors programme*) : Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés bornés, alors : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Si on a en outre $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup(F_n) - \inf(F_n)) = 0$ alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est réduit à un point.

- **Exemples d'application** (*hors programme*) : Si (u_n) est une suite bornée alors elle admet une borne inférieure a_0 et une borne supérieure b_0 . On applique ensuite le principe des tiroirs : l'un au moins des deux intervalles $[a_0, (a_0 + b_0)/2]$ et $[(a_0 + b_0)/2, b_0]$ contient une infinité de termes de la suite, on en choisit donc un qu'on note $[a_1, b_1]$. Et ainsi de suite, à chaque fois la largeur de l'intervalle diminue de moitié, et on obtient ainsi une suite d'intervalles emboîtés dont la largeur tend vers 0. On en déduit que de toute suite infinie et bornée de réels on peut extraire une sous-suite convergente.

Ce théorème est aussi utilisé dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires : On divise l'intervalle initial en deux tant qu'on n'a pas trouvé d'annulation de la fonction ; on s'arrange pour que les images des deux bornes soient toujours de signes contraires. À la fin, on est en présence d'une suite d'intervalles emboîtés dont la largeur tend vers 0.

- **Autres classiques** : Une fonction périodique admettant une limite finie en $+\infty$ est constante (*en exercice*)ⁱⁱⁱ.

Une fonction continue de $[0, 1]$ dans lui-même admet au moins un point fixe (t.v.i. à : $g(x) = f(x) - x$)^{iv}.

4) Définition des limites et de la continuité avec la terminologie des boules ouvertes, des normes ou des distances.

Soit $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$, $E' \subset E$, $f: E' \rightarrow F$; $a \in E'$ et $b \in F$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon.$$

³ Archimède : 287-212 avant J.-C.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, d(a, x) < \eta \Rightarrow d(b, f(x)) < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, x \in B(a, \eta) \Rightarrow f(x) \in B(b, \varepsilon).$$

f continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Donc :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, d(a, x) < \eta \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, x \in B(a, \eta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$$

- *Extension* : f est continue sur une partie A si et seulement si elle est continue en tout point de A (avec la remarque sur le tracé sans lever le crayon).

- *Prolongement par continuité* : Si f est définie sur E' et continue sur un ouvert U de E' , et qu'il existe $a \in E \setminus E'$ tel que l'on ait les deux conditions suivantes :

$$\forall r > 0, B(a, r) \cap U \neq \emptyset, \text{ et } : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in F,$$

on peut alors prolonger f en a par continuité en posant : $f(a) = b$; on dit que f admet un prolongement continu. (Si U est un intervalle réel ouvert alors les seuls points a vérifiant la première condition sont ses extrémités).

- *Cas particulier* : Si $E = \mathbb{R}$, on peut introduire en plus les notions de limites et de continuité à droite et à gauche. (À gauche on remplace $\|x - a\| < \eta$ par $a - \eta < x < a$, et à droite par $a < x < a + \eta$).

- *Propriétés* : Soit f est définie et continue sur E , et K un fermé borné de E .

$$\exists (a, b) \in K^2, \|f(a)\| = \inf\{\|y\|, y \in f(K)\} \text{ et } \|f(b)\| = \sup\{\|y\|, y \in f(K)\}.$$

En particulier si $F = \mathbb{R}$, $\exists (a, b) \in K^2$ tels que $f(a) = \inf\{f(x), x \in K\}$ et $f(b) = \sup\{f(x), x \in K\}$.
(On dit qu'une fonction continue atteint ses bornes sur un fermé borné).

Si $E = F = \mathbb{R}$, l'image d'un intervalle est un intervalle. (C'est aussi le *théorème des valeurs intermédiaires*).

L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

(Exemple : $F = \{u \in E, a \leq \|u\| \leq b\}$ est $f^{-1}([a, b])$ par $f : u \rightarrow \|u\|$).

- *Application* : On définit le diamètre d'une partie bornée A : $\delta(A) = \sup\{d(u, v), (u, v) \in A^2\}$; lorsque A est fermé, comme la distance est une application continue, alors il existe $(u_0, v_0) \in A^2$ tels que : $\delta(A) = d(u_0, v_0)$.

5) Applications coordonnées, applications partielles, propriétés.

Soit $f : E = \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$.

$\phi_j(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_p)$; $\phi_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la j -ème application partielle de f .

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$; $f_k : E \rightarrow \mathbb{R}$ est la k -ième application coordonnée de f .

- *Exemple* : Pour $f(x, y, z) = (x^2 + 2y - z, xy^2z^3)$, $\phi_2(t) = (x^2 + 2t - z, xt^2z^3)$, $f_2(x, y, z) = xy^2z^3$.

- *Propriété de la limite* : $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \lim_{x \rightarrow a} f_2(x), \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x))$.

- *Propriétés de la continuité* : f continue $\Rightarrow \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ continues. (La réciproque est fautive en général).

$$f \text{ continue} \Leftrightarrow f_1, f_2, \dots, f_n \text{ continues}^V.$$

- *Exemples* : • On note π_k la k -ième application coordonnée de id_E sur E ; si $u = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \dots + x_p.e_p$,

alors : $\pi_k(u) = x_k$. On note quelquefois e_k^* à la place de π_k .

Ainsi : f continue en $a \Rightarrow \phi_k$ continue en $\pi_k(a)$ (pour tout k , $1 \leq k \leq \dim(E)$).

On a aussi : $f_k = \pi_k \circ f$ (pour tout k , $1 \leq k \leq \dim(E)$).

• Si f est une fonction vectorielle, $E = \mathbb{R}$, alors les applications coordonnées sont des fonctions réelles. Et, par exemple pour $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et $v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in F$, comme :

$$\|f(t) - v\| < \varepsilon \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |f_k(t) - y_k| < \varepsilon \Rightarrow \|f(t) - v\| < \sqrt{n} \cdot \varepsilon.$$

Alors : $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = v \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow a} f_k(t) = y_k$.

6) Suites à valeurs dans un espace préhilbertien réel. Convergence, sous-suites convergentes.

Les suites sont des applications de \mathbb{N} (ou d'un sous-ensemble) dans \mathbb{R}^m , sachant que \mathbb{N} est un fermé de \mathbb{R} .

Convergence :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - a\| < \varepsilon). \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow d(a, x_n) < \varepsilon). \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n \in B(a, \varepsilon)). \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0. \\ \text{Si } x_n \neq a \text{ pour tout } n : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\Leftrightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(a, \|x_n - a\|) = \{a\}. \end{aligned}$$

• *A-t-on* : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(a, \|x_n - a\|) = \{a\}$?

Si $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn})$ alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (a_1, a_2, \dots, a_m) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{kn} = a_k$ pour tout k ($1 \leq k \leq m$).

L'ensemble des suites à valeurs dans $G = \mathbb{R}^m$ est un espace vectoriel réel. L'ensemble des suites convergentes en est un sous-espace et l'ensemble des suites convergeant vers 0_G en est un sous-espace plus petit. Pour $G = \mathbb{R}$, il y a dans ce dernier sous-espace un autre sous-espace intéressant : celui des suites telles que la série somme converge absolument, car c'est un espace préhilbertien réel^{vi}. Il y a aussi celui des suites telles que la série somme des carrés converge ; il est contenu dans le précédent car $\sum |u_n| < \infty \Rightarrow \sum u_n^2 < \infty$.

Propriétés :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|a\|. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n | y_n) = (a | b). \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \wedge y_n = a \wedge b \text{ (si } G = \mathbb{R}^3). \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \cdot x_n = \alpha \cdot a \text{ ((}\alpha_n\text{) suite de réels)}. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \text{ et } (x_n) \text{ bornée} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \cdot x_n = 0_G \text{ ((}\alpha_n\text{) suite de réels)}. \\ (\alpha_n) \text{ bornée et } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0_G &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \cdot x_n = 0_G \text{ ((}\alpha_n\text{) suite de réels)}. \end{aligned}$$

- *Suites coordonnées* : En notant $(x_{k,n})$ la k -ième suite coordonnée de (x_n) à valeurs dans $G = \mathbb{R}^m$, on a alors, si (x_n) converge vers $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k,n} = a_k$ pour tout entier k : $1 \leq k \leq m$.

- *Proposition* : Si une suite converge elle est bornée.

- *Preuve* : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n \in B(a, \varepsilon))$. Il s'en suit que $(x_n) \subset \{x_1, \dots, x_{N-1}\} \cup B(a, \varepsilon)$; et la réunion de deux ensembles bornés est bornée.

- *Proposition* : Si une suite converge dans E et que f est continue sur E , alors : $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$.

(Exemple : Une suite de polynômes avec la norme intégrale).

- *Exemple des polynômes* : Si on prend $E = \mathbb{R}[X]$, il peut être muni de la norme euclidienne ou d'une norme intégrale. On a, avec la norme euclidienne : $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = Q \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = Q(x)$.

(En assimilant polynômes et fonctions polynômes)^{vii}.

Mais, avec la norme intégrale il n'y a que l'implication : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = Q(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = Q$ ^{viii}.

Il faut remarquer qu'il n'est pas évident qu'une suite de polynômes converge vers un autre polynôme. De nombreuses suites de polynômes convergent vers une fonction qui n'est pas un polynôme (et de nombreuses autres ne convergent pas) ; par exemple : $P_n(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^n$ converge vers $1/(1 - X)$.

7) Dérivées partielles. Définition d'une fonction de classe C^1 à partir des dérivées partielles.

Soit ϕ_k (qu'on suppose dérivable) la k -ième application partielle de f ; alors pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$:

$$\phi'_k(x_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(x), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(x) \right) \text{ (dérivée partielle de } f \text{ par rapport à } x_k \text{)}.$$

- *Exemple* : $f(x, y) = (x^2y, 2x - 3y, e^x \cdot \cos(y))$; $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2xy, 2, e^x \cdot \cos(y))$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2, -3, -e^x \cdot \sin(y))$.

f est de classe C^1 en a si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent dans un voisinage de a et sont continues en a . Il s'en suit que f est de classe C^1 sur un ouvert U si et seulement si ses applications partielles le sont.

- *Remarque* : f peut admettre des dérivées partielles et pourtant ne pas être continue. Soit par exemple la fonction définie par : $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ (si $(x, y) \neq (0, 0)$) et $f(0, 0) = 0$; alors les deux dérivées partielles sont nulles car pour $y = 0$, $\phi_x(x) = f(x, 0) = 0$, et pour $x = 0$, $\phi_y(y) = f(0, y) = 0$ (la dérivée partielle selon x en $(0, 0)$ doit bien être donnée pour $y = 0$ car sa seule variable est x , tandis que la dérivée partielle selon y en $(0, 0)$ doit être donnée pour $x = 0$ car sa seule variable est y). On peut aussi remarquer que les dérivées partielles générales : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) \text{ sont telles que : } \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0.$$

Pourtant, f n'est pas continue en 0 car il existe des chemins donnant des limites distinctes (par exemple : $(y = x)$ et $(y = -x)$).

- *Généralisation* : f est de classe C^p si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent dans un voisinage de a et sont de classe C^{p-1} (attention, ce sont aussi des applications définies sur E), y compris si $p = +\infty$.

8) Formes linéaires coordonnées, dérivées partielles d'une forme linéaire coordonnée.

Formes linéaires coordonnées : π_k telle que, pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$: $\pi_k(x) = x_k$ est la k -ième forme linéaire coordonnée.

Elle est de classe C^1 et ses dérivées partielles sont nulles sauf $\frac{\partial \pi_k}{\partial x_k}$ qui est l'application constante 1 . (Elle est donc de classe C^∞).

- *Forme linéaire quelconque* : Si $\psi = \alpha_1 \cdot \pi_1 + \alpha_2 \cdot \pi_2 + \dots + \alpha_p \cdot \pi_p$, alors : $\alpha_k = \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$, et : $\psi = \sum_{k=1}^p \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \cdot \pi_k$.

9) Définition générale d'une différentielle à l'aide des dérivées partielles et des formes linéaires coordonnées.

Une différentielle est une application qui à un vecteur associe une application linéaire ; dx_k est l'application (constante) qui à tout vecteur a associe $dx_k[a] = \pi_k$.

f de classe C^1 en a admet une différentielle notée df telle que :

$$df = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = (df_1, df_2, \dots, df_n) = \left(\sum_{k=1}^p \frac{\partial f_1}{\partial x_k} dx_k, \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_2}{\partial x_k} dx_k, \dots, \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_n}{\partial x_k} dx_k \right).$$

Avec pour tout k : $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \frac{\partial f_2}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \right)$.

Les coordonnées d'une différentielle sont donc des fonctions dans la famille $(dx_1, dx_2, \dots, dx_p)$.

| |
|--|
| $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p} dx_p.$ Différentielle : un vecteur a pour image une application linéaire. |
| $df[a] = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot \pi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot \pi_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \cdot \pi_p.$ Application linéaire : un vecteur a pour image un vecteur. |
| $df[a](x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \cdot x_p.$ C'est un vecteur. |
| Cas particulier : $dx_k = d\pi_k$, $dx_k[a] = \pi_k$, $dx_k[a](x) = x_k$. |

- *Remarque* : $(a, x) \in E^2$, $df \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$, $df[a] \in \mathcal{L}(E, F)$, $df[a](x) \in F$.

- *Proposition* : Si f est une application linéaire alors pour tout vecteur a : $df[a] = f$.

- *Exemples* : • $E = F = \mathbb{R}$: $df[a](1) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = f'(a) \Rightarrow df[a](x) = f'(a) \cdot x$, et : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx = f' dx$, où $dx[a] = id_{\mathbb{R}}$.

• $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^3$: $f(t) = \begin{pmatrix} a(t) = t^2 + 1 \\ b(t) = 3t - 2 \\ c(t) = t^3 + 5t \end{pmatrix}$. Alors :

$$df = \begin{pmatrix} da \\ db \\ dc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \cdot dt \\ b' \cdot dt \\ c' \cdot dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t \mapsto 2t) \cdot dt \\ (t \mapsto 3) \cdot dt \\ (t \mapsto 3t^2 + 5) \cdot dt \end{pmatrix}; \text{ pour } \tau \in \mathbb{R} : df[\tau] = \begin{pmatrix} a'(\tau) \cdot \pi_\tau \\ b'(\tau) \cdot \pi_\tau \\ c'(\tau) \cdot \pi_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tau \cdot id_{\mathbb{R}} \\ 3 \cdot id_{\mathbb{R}} \\ (3\tau^2 + 5) \cdot id_{\mathbb{R}} \end{pmatrix}; df[\tau](t) = t \cdot \begin{pmatrix} 2\tau \\ 3 \\ 3\tau^2 + 5 \end{pmatrix}.$$

• $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^n$, f est alors une fonction vectorielle ; on a encore l'égalité : $df[a](1) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = f'(a)$, ainsi que : $df[a](x) = x \cdot f'(a) = (x \cdot f_1'(a), x \cdot f_2'(a), \dots, x \cdot f_n'(a))$, et aussi : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx = f' dx = (f_1' dx, f_2' dx, \dots, f_n' dx)$.

• $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$; soit : $f(x, y) = x^2 y^3 + 3x + 2y$. Alors : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 + 3$, et : $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 y^2 + 2$. On a donc : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$; d'où : $df[(\alpha, \beta)](x, y) = (2\alpha\beta^3 + 3)x + (3\alpha^2\beta^2 + 2)y$.

• *Application à variables séparées* : $E = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}$; soit f de E dans \mathbb{R} telle qu'il existe p fonctions réelles f_1, f_2, \dots, f_p pour lesquelles : $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_p(x_p)$. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f_k'(a_k), \text{ et : } df[a](x) = f_1'(a_1) \cdot x_1 + f_2'(a_2) \cdot x_2 + \dots + f_p'(a_p) \cdot x_p.$$

- *Remarque* : Ici, $\frac{\partial f}{\partial x} = ((x, y) \mapsto 2xy^3 + 3)$, et : $\frac{\partial f}{\partial y} = ((x, y) \mapsto 3x^2 y^2 + 2)$; ces notations désignent des fonctions.

- Exemple de l'exponentielle complexe assimilée à une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 :

Pour $z = x + iy$, $e^z = e^x \cdot \cos(y) + i \cdot e^x \cdot \sin(y)$. On construit donc, pour $u: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : f(u) = \begin{pmatrix} e^x \cdot \cos(y) \\ e^x \cdot \sin(y) \end{pmatrix}$. Alors, pour $a: \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} : df = \begin{pmatrix} (u \mapsto e^x \cdot \cos(y)).dx + (u \mapsto -e^x \cdot \sin(y)).dy \\ (u \mapsto e^x \cdot \sin(y)).dx + (u \mapsto e^x \cdot \cos(y)).dy \end{pmatrix}$; $df[a] = \begin{pmatrix} e^\alpha \cdot \cos(\beta) \cdot \pi_x - e^\alpha \cdot \sin(\beta) \cdot \pi_y \\ e^\alpha \cdot \sin(\beta) \cdot \pi_x + e^\alpha \cdot \cos(\beta) \cdot \pi_y \end{pmatrix} = e^\alpha \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_x \\ \pi_y \end{pmatrix}$;

$$df[a](u) = \begin{pmatrix} e^\alpha \cdot \cos(\beta) \cdot x - e^\alpha \cdot \sin(\beta) \cdot y \\ e^\alpha \cdot \sin(\beta) \cdot x + e^\alpha \cdot \cos(\beta) \cdot y \end{pmatrix} = e^\alpha \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En notant R_β la matrice de la rotation d'angle β : $df[a] = e^\alpha \cdot R_\beta \cdot id_{\mathbb{R}^2}$; $df[a](u) = e^\alpha \cdot R_\beta \cdot u$.

La transformation complexe correspondant à cette rotation étant le produit par $e^{i\beta}$, et en notant A l'affixe de a : $df[A](z) = e^A \cdot z$ (on retrouve l'égalité : $(e^z)' = e^z$).

- Propriétés, α et β étant des scalaires, f et g des fonctions de U ouvert de E dans F :

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot df + \beta \cdot dg ; d(fg) = (df)g + (f)dg. \text{ (Mêmes remarques que pour le gradient).}$$

Si $F = \mathbb{R}^3$, alors : $d(f \wedge g) = df \wedge g + f \wedge dg$. (Mêmes remarques que pour le gradient).

Si $F = \mathbb{R}$, alors : $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$; si f ne s'annule pas sur U : $d(1/f) = -df/f^2$.

Idem avec le quotient si $F = \mathbb{R}$ ou avec le produit scalaire si $F = \mathbb{R}^n$, etc...

- Preuves : La première est triviale. $d(fg)[a] = \sum \frac{\partial(fg)}{\partial x_k}(a) \cdot p_k = \sum \frac{\partial(f_1 g_1 + \dots + f_n g_n)}{\partial x_k}(a) \cdot p_k$; il suffit donc de prouver la seconde pour $F = \mathbb{R}$, ce qui est évident car la dérivée partielle est égale à la dérivée de l'application partielle. La propriété du produit vectoriel provient de la décomposition suivante : $(f_i g_j - f_j g_i)' = (f_i' g_j - g_i' f_j) + (f_i g_j' - g_i f_j')$. L'avant dernière propriété est un cas particulier de la première ; etc...

- Exemple : Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X = (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, et $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2$. Alors :

$$df = d\left(\sum_{k=1}^n x_{i,k} X_{k,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \left(\sum_{k=1}^n d(x_{i,k} X_{k,j})\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \left(\sum_{k=1}^n (dx_{i,k} \cdot X_{k,j} + x_{i,k} \cdot dx_{k,j})\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} =$$

$$\left(\sum_{k=1}^n dx_{i,k} \cdot X_{k,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} + \left(\sum_{k=1}^n d(x_{i,k} \cdot dx_{k,j})\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = dX \cdot X + X \cdot dX.$$

On peut ainsi écrire : $\boxed{dX^2 = dX \cdot X + X \cdot dX}$.

Plus généralement, si X et Y sont des matrices de fonctions : $d(XY) = dX \cdot Y + X \cdot dY$.

10) Gradient.

$B = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est la base canonique orthonormale de E , avec $F = \mathbb{R}$; a et x sont deux vecteurs

quelconques de E , avec : $x: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_p \end{pmatrix}$, $dx[a] = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_p \end{pmatrix} = id_E$, $dx[a](x) = x$.

$$grad_f = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot e_k ; grad_f[a] = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot e_k ; df = (grad_f | dx) ; df[a] = (grad_f[a] | id_E) ; df[a](x) = (grad_f[a] | x).$$

- Remarque : Le gradient est une application qui à un vecteur de E associe un vecteur de E (en conséquence, lorsqu'on utilise la notation avec le produit scalaire, on est censé faire le produit d'une application de E dans E avec une application de E dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, ce qui n'a pas de sens mathématique ; c'est donc seulement une notation).

- *Application* : Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$, ainsi que la courbe $\mathcal{C}: (f(x, y) = 0)$, où f est de classe C^1 . Alors l'équation de la tangente en $M_0: (x_0, y_0)$ est donnée par : $(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) = 0)$.

(M est sur la tangente à Γ en M_0 si et seulement si l'on a : $df[M_0](M) = dfM_0$, en remarquant que dans un espace ponctuel cela revient à : $df[M_0](\overrightarrow{M_0M}) = 0$).

On remarque alors que le gradient $\text{grad}_f[M_0]$ est normal à la courbe en M_0 .

• *À la dimension supérieure* : Dans $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}$, soit la surface $\mathcal{S}: (f(x, y, z) = 0)$, où f est de classe C^1 ; l'équation du plan tangent en $M_0: (x_0, y_0, z_0)$ est : $(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0)$.

De même : $\text{grad}_f[M_0]$ est normal à la surface en M_0 .

- *Cas particulier* : Une surface peut aussi être définie par une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par : $\mathcal{S}: (z = f(x, y))$. On peut alors appliquer la formule précédente à $g(x, y, z) = f(x, y) - z$; ainsi le plan tangent a pour équation en $M_0: (z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0))$.

11) Matrices jacobiennes.

Soit $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une fonction de $E = \mathbb{R}^p$ dans $F = \mathbb{R}^n$, donnée par ses fonctions composantes (chacune est donc de E dans \mathbb{R}).

$df[a]$ étant une application linéaire, elle admet une matrice appelée *matrice jacobienne* de f en a et notée $J_f[a]$.

En notant x_B la matrice colonne représentant x dans la base canonique :

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p} \end{pmatrix}, \quad J_f[a] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix};$$

$$df = J_f \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \dots \\ dx_p \end{pmatrix}, \quad df[a] = J_f[a] \cdot \begin{pmatrix} dx_1[a] \\ dx_2[a] \\ \dots \\ dx_p[a] \end{pmatrix}$$

$$df = J_f \cdot dx, \quad df[a] = J_f[a] \cdot dx[a].$$

$$df[a](x) = J_f[a] \cdot x_B$$

- *Remarques* : J_f est une matrice d'applications de E dans \mathbb{R} , tandis que $J_f[a]$ est la matrice de l'application linéaire $df[a]$; c'est donc cette dernière matrice, $J_f[a]$, qu'on appelle : la *matrice jacobienne* de f en a ; mais, par abus de langage, on appellera quand même matrice jacobienne de f la matrice de fonctions.

On appelle *Jacobien* le déterminant de la matrice jacobienne.

Si $F = \mathbb{R}$, alors $df[a](x) = J_f[a] \cdot x_B = (\text{grad}_f[a] \cdot x)$.

- *Exemple* : Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, et $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ 3x + y \\ 5x + xy \end{pmatrix}$. Alors : $J_f = \begin{pmatrix} ((x, y) \mapsto 2xy) & ((x, y) \mapsto x^2) \\ ((x, y) \mapsto 3) & ((x, y) \mapsto 1) \\ ((x, y) \mapsto y + 5) & ((x, y) \mapsto x) \end{pmatrix}$. Par suite :

$$J_f[(x, y)] = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 3 & 1 \\ y + 5 & x \end{pmatrix}, \quad \text{et : } J_f[(x, y)] \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xyh + x^2k \\ 3h + k \\ (y + 5)h + xk \end{pmatrix} = df[(x, y)]((h, k)); \quad df = J_f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \quad df[(x, y)] = J_f[(x, y)] \cdot \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}$$

12) Différentielle d'une somme, d'un produit, d'une composée, d'une réciproque.

Soit $E = \mathbb{R}^p, F = \mathbb{R}^m$ et $G = \mathbb{R}^n$, U un ouvert de E , V un ouvert de F , ainsi que les fonctions $f: U \rightarrow V$ et $g: V \rightarrow G$. Soit $a \in U$ et $b = f(a)$; si f est de classe C^1 en a et g de classe C^1 en b , alors $g \circ f$ est de classe C^1 en a , avec : $dg \circ f[a] = dg[b] \circ df[a] = dg[f(a)] \circ df[a]$. Cette égalité se transmet aux matrices jacobiniennes car la matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit de leurs matrices, et on peut finalement écrire : $J_{g \circ f}[a] = J_g[f(a)] \cdot J_f[a]$.

- *Remarque* : Si f est de classe C^1 sur U et g sur V alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur U .

| | |
|--|---|
| $d(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot df + \beta \cdot dg$ (α et β étant des scalaires). | $J_{\alpha f + \beta g} = \alpha \cdot J_f + \beta \cdot J_g$ (α et β étant des scalaires). |
| $d(f g) = (df g) + (f dg)$. | $J_{(f g)} = {}^t J_f \times g + {}^t J_g \times f$. |
| $d(f \wedge g) = df \wedge g + f \wedge dg$ (si $F = \mathbb{R}^3$). | |
| $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$ (si $F = \mathbb{R}$). | |
| $d(1/f) = -df/f^2$ (si $F = \mathbb{R}$ et si f ne s'annule pas). | |
| $d(f/g) = (df \cdot g - f \cdot dg)/g^2$ (si $F = \mathbb{R}$ et si g ne s'annule pas). | |
| $dg \circ f[a] = dg[f(a)] \circ df[a]$ (a vecteur quelconque). | $J_{g \circ f}[a] = J_g[f(a)] \times J_f[a]$ (a vecteur quelconque). |
| $df^{-1}[b] = (df[f^{-1}(b)])^{-1}$ (b vecteur quelconque) ^{ix} . | $J_{f^{-1}}[b] = (J_f[f^{-1}(b)])^{-1}$ (b vecteur quelconque). |

- *Produit scalaire* : On note $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$, ${}^t f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, ${}^t g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, où les f_i et les g_i vont de $E = \mathbb{R}^p$ dans \mathbb{R} .

Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, on assimile le produit scalaire $(f(x)|g(x))$ aux écritures par abus : $(f|g)(x) = ({}^t f \times g)(x)$. Alors :

$$J_{(f|g)} = J_{{}^t f \times g} = {}^t f \times J_g + {}^t g \times J_f. \text{ Qu'on écrit plutôt : } J_{(f|g)} = {}^t J_f \times g + {}^t J_g \times f.$$

- *Remarque* : Si $t \mapsto (x(t), y(t)) \mapsto f(x, y)$; on note $\phi(t) = f(x(t), y(t))$; alors :

$$\phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t).$$

Soit $h = g \circ f$ avec $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ et $g(x, y, z) \in \mathbb{R}$. Alors :

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(f(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial g}{\partial z}(f(t)) \cdot z'(t). \text{ (On peut généraliser pour tout } n \geq 2).$$

La démonstration est simple avec les matrices jacobiniennes.

Exemple : $t \mapsto (x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(t))$ et $f(x, y) = y/x$ pour $x \neq 0$. Alors : $\phi'(t) = 1 + \tan^2(t)$.8

- *Exemples.*

• *Changement de variable* : Si f est une fonction vectorielle de classe C^1 d'un intervalle réel ouvert J dans F , où $F = \mathbb{R}^n$, et u une application de classe C^1 d'un intervalle réel ouvert I dans J ; pour $t \in I$:

$$df \circ u[t] = df[u(t)] \circ du[t].$$

- *Interprétation* : $df \circ u[t] = \frac{\partial(f \circ u)}{\partial t}(t) \cdot id_{\mathbb{R}}$, $df[v] = (\frac{\partial f_1}{\partial t}(v) \cdot id_{\mathbb{R}}, \frac{\partial f_2}{\partial t}(v) \cdot id_{\mathbb{R}}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial t}(v) \cdot id_{\mathbb{R}})$, $du[t] = \frac{\partial u}{\partial t}(t) \cdot id_{\mathbb{R}}$; donc :

$$df \circ u[t] = (f \circ u)'(t) \cdot id_{\mathbb{R}}, \quad df[v] = (f_1'(v) \cdot id_{\mathbb{R}}, f_2'(v) \cdot id_{\mathbb{R}}, \dots, f_n'(v) \cdot id_{\mathbb{R}}) = f'(v) \cdot id_{\mathbb{R}}, \quad du[t] = u'(t) \cdot id_{\mathbb{R}};$$

D'où : $(f \circ u)'(t) \cdot id_{\mathbb{R}} = (f'(u(t)) \circ u'(t)) \cdot id_{\mathbb{R}} = f'(u(t)) \cdot u'(t) \cdot id_{\mathbb{R}}$, et ainsi : $(f \circ u)' = f'(u) \cdot u'$.

Avec les matrices jacobiniennes : $J_{f \circ u}[t] = J_f[u(t)] \times J_u[t] \Leftrightarrow \left(\frac{\partial(f \circ u)}{\partial t}(t) \right) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix} \cdot (u'(t))$, etc..

Exemple : $f(u) = (2u^2 - 1, 1/u^2)$; $u(t) = \cos(t)$: $(f \circ u)(t) = (\cos(2t), 1 + \tan^2(t))$.

• **Composée** : - Soit $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ 3x + y \\ 5x + xy \end{pmatrix}$ (l'exemple du paragraphe précédent), et : $g(\alpha, \beta, \gamma) = 2\alpha + 3\beta + 4\gamma$. Alors :

$$J_{g \circ f}(x, y) = J_g[f(x, y)] \cdot J_f[(x, y)] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 3 & 1 \\ y + 5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xy + 4y + 29 & 2x^2 + 4x + 3 \end{pmatrix}.$$

$$d(g \circ f)[(x, y)] = dg[f(x, y)] \circ df[(x, y)] = \begin{pmatrix} 2\pi_\alpha + 3\pi_\beta + 4\pi_\gamma \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2xy.\pi_x + x^2.\pi_y \\ 3.\pi_x + \pi_y \\ (y + 5).\pi_x + x.\pi_y \end{pmatrix} = (4xy + 4y + 29).\pi_x + (x^2 + 4x + 3).\pi_y.$$

Car si on applique cette dernière expression à un vecteur (λ, μ) , on obtient :

$$d(g \circ f)[(x, y)](\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 2\pi_\alpha + 3\pi_\beta + 4\pi_\gamma \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2xy.\lambda + x^2.\mu \\ 3.\lambda + \mu \\ (y + 5).\lambda + x.\mu \end{pmatrix} \right) = (4xy + 4y + 29).\lambda + (x^2 + 4x + 3).\mu.$$

- Soit $g(x, t) = x^2 + 2x + 2t$, $\phi(t)$ la plus grande valeur de x annulant $g(x, t)$ si elle existe (on a donc $g(\phi(t), t) = 0$), et $f(t) = (\phi(t), t)$. Alors : $dg \circ f[a] = dg[f(a)] \circ df[a]$, avec : $dg[(\alpha, \tau)](x, t) = \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha, \tau)x + \frac{\partial g}{\partial t}(\alpha, \tau)t$, $dg[(\alpha, \tau)](x, t) = (2\alpha + 1)x + 2t$, et : $df[a](t) = (\phi'(a)t, t)$, d'où : $dg \circ f[a](t) = ((\phi(a) + 1)\phi'(a) + 1).2t$. Mais comme $g \circ f(t) = g(\phi(t), t) = 0$, c'est la fonction nulle, elle est égale à sa différentielle donc $dg \circ f[a] = 0$ pour tout t . Il s'en suit que ϕ est solution de l'équation différentielle : $(y + 1)y' + 1 = 0$. En posant $z = y + 1$, on arrive finalement à la solution : $y = \pm\sqrt{k - t} - 1$; la condition initiale $\phi(0) = 0$ permet d'affiner : $\phi(t) = \sqrt{1 - t} - 1$. (Il y a évidemment plus simple car on retrouve la formule de la dérivée de la réciproque et, ici, on peut connaître directement cette réciproque).

- La dérivée de la valeur absolue n'est pas la valeur absolue de la dérivée : Si f est dérivable sur un intervalle I , soit alors : $\forall x \in I, g(x) = |f(x)|$.

C'est une fonction composée, mais on peut raisonner plus simplement :

Si x est tel que $f(x) > 0$, $g'(x) = f'(x)$.

Si x est tel que $f(x) < 0$, $g'(x) = -f'(x)$.

Si x est tel que $f(x) = 0$ et f change de signe en passant par x , alors g n'est pas dérivable en x .

Si x est tel que $f(x) = 0$ et qu'il existe $\eta > 0$ tel que f est nulle sur $]x - \eta, x + \eta[$, alors $g'(x) = 0$.

Mais le signe de f' ne coïncidant en général pas avec celui de f , alors, lorsqu'elle existe : $|g'(x)| \neq |f'(x)|$.

On peut d'ailleurs se poser la question : Quelles sont les fonctions qui sont du même signe que leur dérivée ?

Soit deux annulations consécutives et distinctes de f' ; alors f est nulle pour les deux mêmes valeurs, mais comment peut elle être croissante ou décroissante entre les deux ? Il en résulte que f' ne peut s'annuler qu'une fois, voire être nulle sur un intervalle, auquel cas f est aussi nulle sur cet intervalle.

Si f' s'annule une seule fois et change de signe, il est simple de montrer que les signes de f et f' sont nécessairement opposés à gauche de l'annulation car si f' est positive, alors f croît jusqu'à 0 et est donc négative, idem pour l'autre signe.

Il en résulte que soit f est nulle sur un intervalle, soit f' ne s'annule pas ; f est alors croissante et strictement positive ou décroissante et strictement négative.

13) Différentielle d'ordre supérieur à 1, théorème de Schwarz.

Soit f de l'ouvert $U \subset E = \mathbb{R}^p$ dans $F = \mathbb{R}^n$; f est de classe C^m si et seulement si toutes les dérivées partielles d'ordre m existent et sont continues.

Théorème de Schwarz : Si f est de classe C^m et σ une permutation sur $\{1, 2, \dots, m\}$, alors :

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{\sigma(1)} \partial x_{\sigma(2)} \dots \partial x_{\sigma(m)}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}. \text{ (L'ordre de dérivation ne compte pas)}$$

Par exemple : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (il est indifférent de dériver d'abord selon la variable x et ensuite selon la variable y , ou le contraire).

- *Différentielle seconde* : Si f est de classe C^2 , alors la différentielle seconde de f est notée d^2f et, pour tout point a de E , $d^2f[a]$ est une application bilinéaire symétrique de E^2 dans F définie, pour les vecteurs $u : (x_1, x_2, \dots, x_p)$ et $v : (y_1, y_2, \dots, y_p)$ donnés dans la base canonique B , par :

$$d^2f[a](u, v) = \sum_{h=1}^p \sum_{k=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k}(a) x_h y_k \quad (\text{attention : les dérivées partielles sont des vecteurs et les } x_h, y_k \text{ des scalaires}).$$

Exemple : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1^2 x_2^3)$; pour $a = (\alpha, \beta)$,

$$d^2f[a](u, v) = 2\beta^3 x_1 y_1 + 6\alpha\beta^2(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 6\alpha^2\beta x_2 y_2.$$

Si $F = \mathbb{R}$, $d^2f[a]$ est une forme bilinéaire symétrique dont la matrice symétrique (théorème de Schwarz) est :

$$M(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{pmatrix}, \text{ et alors : } d^2f[a](u, v) = {}^t u_B M(a) v_B.$$

Exemple : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 y^3$; pour $a = (\alpha, \beta)$, $M(a) = \begin{pmatrix} 2\beta^3 & 6\alpha\beta^2 \\ 6\alpha\beta^2 & 6\alpha^2\beta \end{pmatrix}$.

On peut généraliser ceci à $F = \mathbb{R}^n$ en écrivant $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et en écrivant cette matrice, notée alors $M_k(a)$, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec :

$$d^2f[a](u, v) = ({}^t u_B M_1(a) v_B, {}^t u_B M_2(a) v_B, \dots, {}^t u_B M_n(a) v_B).$$

- *Exemples* : Si $m = 2$, en notant x et y les variables, il n'y a que trois dérivées partielles d'ordre 2, à savoir :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

• Pour $f(x, y) = (e^x \cdot \cos(y), e^x \cdot \sin(y))$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = f(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -f(x, y)$, et :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (-e^x \cdot \sin(y), e^x \cdot \cos(y)).$$

D'où (toutes les variables $a_x, a_y, u_x, u_y, v_x, v_y$ étant des réels), $a : (a_x, a_y)$, $u : (u_x, u_y)$, $v : (v_x, v_y)$:

$$d^2f[a](u, v) = (e^{a_x} \cdot ((u_x v_x - u_y v_y) \cdot \cos(a_y) - (u_x v_y + u_y v_x) \cdot \sin(a_y)), e^{a_x} \cdot ((u_x v_y + u_y v_x) \cdot \cos(a_y) + (u_x v_x - u_y v_y) \cdot \sin(a_y))).$$

En notant $a = a_x + i \cdot a_y$, $u = u_x + i \cdot u_y$, $v = v_x + i \cdot v_y$, alors : $d^2f[a](u, v) = e^a u v$.

• Pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, u, v) \in \mathbb{R}^3$: $d^2f[a](u, v) = f''(a) u v$.

14) Formule de Taylor à l'ordre 1 et 2 en un point, notations de Monge, dispositions en col et en ballon.

Soit f de l'ouvert $U \subset E = \mathbb{R}^p$ dans $F = \mathbb{R}$ (dans \mathbb{R}^n il faut appliquer cette formule à chaque application coordonnée).

a et h étant des vecteurs de E , f doit être de classe C^1 à l'ordre 1 et de classe C^2 à l'ordre 2 sur l'ouvert U contenant $\bar{B}(a, h)$. On a dans la base canonique orthonormale de E : $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$. Alors :

| | |
|-----------|--|
| Ordre 1 : | $f(a + h) = f(a) + df[a](h) + o(\ h\) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a).h_p + o(\ h\).$ |
| Ordre 2 : | $f(a + h) = f(a) + df[a](h) + \frac{1}{2}.d^2f[a](h, h) + o(\ h\ ^2).$ $f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).h_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j + o(\ h\ ^2).$ |

- *Remarque* : Soit la fonction $\varepsilon(h) = o(\|h\|)$, alors d'une part c'est une fonction de E dans \mathbb{R} , et d'autre part elle vérifie : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} = 0$.

• Pour $p = 1$: $\Delta: (y = f(a) + f'(a)(x - a))$ est la tangente au point $(a, f(a))$ à la courbe $\mathcal{C}: (y = f(x))$.

• Si $E = \mathbb{R}^p$ ($p = 1$), et $F = \mathbb{R}^n$ (fonction vectorielle, cf. §16) :

$$f(a + h) = (f_1(a) + h.f_1'(a) + o(h), f_2(a) + h.f_2'(a) + o(h), \dots, f_n(a) + h.f_n'(a) + o(h)).$$

La dérivée au point $f(a)$, soit : $f'(a)$, s'appelle le vecteur vitesse au point de paramètre a ; s'il est non nul (on dit que le point est régulier), il est tangent en $f(a)$ à la courbe décrite dans F par $f(t)$ lorsque t varie.

15) Extremums.

Pour $p = 2$, on utilise les notations de Monge⁴ : $R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$, $\Delta = S^2 - RT$.

Soit la surface \mathcal{S} de \mathbb{R}^3 , d'équation cartésienne : $(z = f(x, y))$; en notant $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, $a = (\alpha, \beta)$ et $h = (\lambda, \mu)$; en appliquant la formule du plan tangent au point $M_0: (\alpha, \beta, f(a))$, le plan tangent en M_0 a alors pour équation :

$$\Pi: (z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a).(x - \alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(a).(y - \beta)). \text{ Pour } x = \alpha + \lambda \text{ et } y = \beta + \mu, \text{ soit } z_a \text{ la cote du point du plan } \Pi$$

$$\text{correspondant : } z_a = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a).\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(a).\mu. \text{ Alors : } f(a + h) = z_a + \frac{1}{2}.(R.\lambda^2 + 2S.\lambda\mu + T.\mu^2) + o(\lambda^2 + \mu^2).$$

La quantité $R.\lambda^2 + 2S.\lambda\mu + T.\mu^2$ donne donc la position relative de la surface et de son plan tangent (*hors programme dans le cas général*) :

Si $\Delta < 0$ la surface \mathcal{S} ne traverse pas le plan tangent P . Le point M est un point elliptique (**disposition en ballon**).

Si $\Delta > 0$ la surface \mathcal{S} traverse le plan tangent P . Le point M est un point hyperbolique (**disposition en col**).

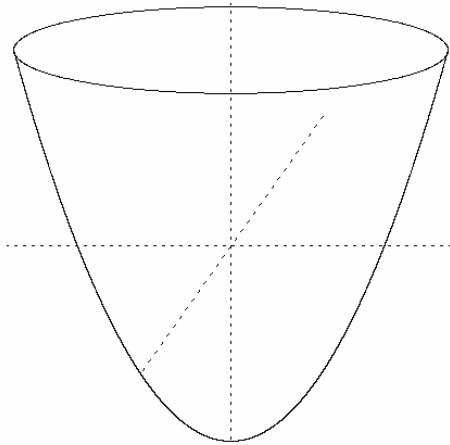
Si $\Delta = 0$ on ne peut pas conclure, il faut essayer de trouver des points de chaque côté du plan tangent (si possible).

- *Remarques* : • De même que la courbe d'équation $(y = f(x))$ est la courbe représentative de la fonction réelle f , on peut considérer que la surface d'équation $(z = f(x, y))$ est la surface représentative de la fonction f . Ainsi, les extremums de la surface relativement à l'axe des cotes Oz sont aussi les extremums de la fonction f .

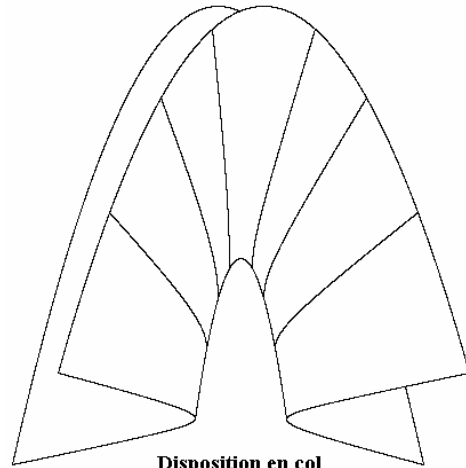
• Dans le cas où $\Delta > 0$, on obtient deux directions dans laquelle la surface coupe son plan tangents (avec $\lambda = x - x_0$ et $\mu = y - y_0$) : $D_1: (R(x - x_0) + (S - \sqrt{\Delta})(y - y_0) = 0)$ et $D_2: (R(x - x_0) + (S + \sqrt{\Delta})(y - y_0) = 0)$.

• Pour une courbe donnée par $\mathcal{C}: (f(x, y) = 0)$, où f est de classe C^2 , l'équation de la tangente en M_0 est donnée par $(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) = 0)$; en posant : $\lambda = x - x_0$ et $\mu = y - y_0$, la quantité $R.\lambda^2 + 2S.\lambda\mu + T.\mu^2$ donne donc la position relative de la courbe et de sa tangente.

⁴ Gaspard Monge : 1746-1818.



Disposition en ballon



Disposition en col

Pour a et h donnés dans \mathbb{R}^2 , et f de classe C^2 ; alors, en considérant les points a pour lesquels le plan tangent est parallèle à xOy , c'est-à-dire : $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, qu'on peut aussi écrire : $df[a] = 0$. Ces points sont appelés : *points critiques*. Alors, au voisinage de a :

Si $\Delta < 0$: f admet un extremum (R et S sont de même signe).
 Si $R < 0$ c'est un maximum.
 Si $R > 0$ c'est un minimum.

Si $\Delta > 0$: f n'admet pas d'extremum.

Si $\Delta = 0$ on ne peut pas conclure (il faut procéder différemment).

- *Exemple* : Trouver les extremums, s'il y en a, de $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2$.

16) Cas particulier des fonctions vectorielles, dérivabilité, formules de Leibniz, ordre m .

Ici $E = \mathbb{R}$ (et $F = \mathbb{R}^n$). La fonction f est alors appelée : fonction vectorielle.

Dérivabilité ; f est dérivable en a si et seulement si la limite suivante existe : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Dérivabilité à gauche ou à droite.

Si cette limite existe pour $h > 0$, f est dérivable à droite en a : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_+(a)$.

Si cette limite existe pour $h < 0$, f est dérivable à gauche en a : $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_-(a)$.

f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a .

Idem pour les dérivées d'ordres supérieurs. Lorsqu'elles existent, la dérivée première est appelée **vecteur vitesse**, et la dérivée seconde **vecteur accélération**.

- *Proposition* : La dérivabilité implique la continuité^x.

Propriétés :
 (f et g dérivables) ;
 (F désignant
 l'ensemble d'arrivée).

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f' \quad (\alpha \text{ étant un scalaire}).$$

$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$$

$$(f \wedge g)' = (f' \wedge g) + (f \wedge g') \quad (\text{si } F = \mathbb{R}^3).$$

- **Théorème du prolongement C^1** : Soit f continue sur $[a, b]$ et de classe C^1 sur $]a, b[$ (fonction vectorielle) ; si f' admet une limite finie en a , alors f est de classe C^1 sur $[a, b]$ (avec $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$).

- **Preuve** : Soit $x \in]a, b[$; on applique le théorème des accroissements finis sur $[a, x]$: $\exists c \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$.

En notant λ la limite à droite de f' en a : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall y, a < y < a + \eta \Rightarrow |f'(y) - \lambda| < \epsilon$.

Donc, pour $a < c < x \leq a + \eta$: $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lambda| = |f'(c) - \lambda| < \epsilon$. Il s'en suit qu'on a bien : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda$. (On peut adapter à $[a, b[$).

• **Énoncé équivalent** : Soit f continue sur un intervalle I de largeur non nulle contenant x_0 . Si f est de classe C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$ et que f' admet une limite finie α en x_0 , alors f est de classe C^1 sur I avec $f'(x_0) = \alpha$.

- **Preuve** : Si x_0 est une borne de I alors l'énoncé est le même ; il y a alors équivalence entre les deux énoncés. Si x_0 n'est pas une borne de I , alors on applique le théorème précédent à $[x_0, b]$, où b est un élément de I strictement supérieur à x_0 . Il s'en suit que le premier énoncé implique le second dans ce cas particulier, ce qui assure finalement l'équivalence totale entre les deux.

- **Exemple** : $\{f(x) = x^3 \cdot \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0, f(0) = 0\}$.

• **Ce théorème reste valide avec les dérivées partielles** : Soit f de $E = \mathbb{R}^p$ dans $F = \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ fixé, et $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$; si f est continue dans un voisinage U de a et de classe C^1 dans la partie de ce voisinage telle que $x_k \neq a_k$, et si la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ existe, alors f est de classe C^1 dans U , et cette limite

vaut : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ (en remarquant que : $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{x_k \rightarrow a_k} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p) - f(a)}{x - x_k}$).

Formules de Leibniz : (α, f et g étant m fois dérivables, α étant une fonction réelle).

(Démonstrations par récurrence) ;

(F désignant l'ensemble d'arrivée).

$$\begin{aligned} (f|g)^{(m)} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (f^{(k)} | g^{(m-k)}). \\ (f \wedge g)^{(m)} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (f^{(k)} \wedge g^{(m-k)}) \quad (\text{si } F = \mathbb{R}^3). \\ (fg)^{(m)} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(k)} g^{(m-k)} \quad (\text{si } F = \mathbb{R}). \\ (\alpha \cdot f)^{(m)} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha^{(k)} \cdot f^{(m-k)}. \end{aligned}$$

(La troisième ligne est un cas particulier de la première, ainsi que de la quatrième).

Formule de Taylor-Young à l'ordre m . Si f est de classe C^m (m fois dérivable et sa dérivée m -ième est continue) :

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(a) + \dots + \frac{h^m}{m!} \cdot f^{(m)}(a) + o(h^m).$$

- **Classe C^m** : f est de classe C^m si elle est m fois dérivable et que sa dérivée m -ième est continue. Il existe alors un développement limité d'ordre m donné par la formule de Taylor-Young (avec les propriétés classiques sur la somme, le produit par un scalaire, la dérivée, etc...) : $f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(a) + \dots + \frac{h^m}{m!} \cdot f^{(m)}(a) + o(h^m)$.

- **Formule de Taylor-Young à l'ordre m** : Si f est de classe C^m , $f(a + h) = \left(\sum_{k=0}^m \frac{h^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) + o(h^m) \right)_{1 \leq i \leq m}$.

La dérivée seconde au point $f(a)$, soit $f''(a)$, s'appelle le vecteur accélération au point de paramètre a ; selon qu'il est ou non colinéaire au vecteur vitesse, on a un renseignement sur la forme locale de la courbe au point $f(a)$. (Lorsqu'il n'est pas colinéaire, on dit que le point est birégulier).

- **Généralisation** : On peut aussi définir les fonctions vectorielles continues par morceaux, ou bien de classe C^1 par morceaux ou T-périodiques, etc...

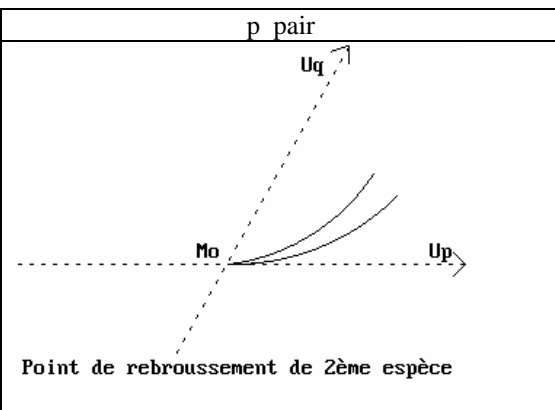
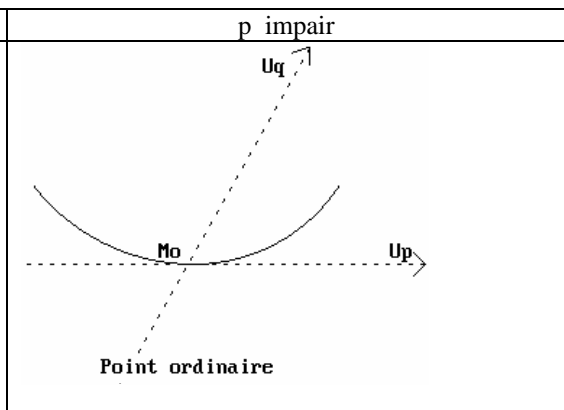
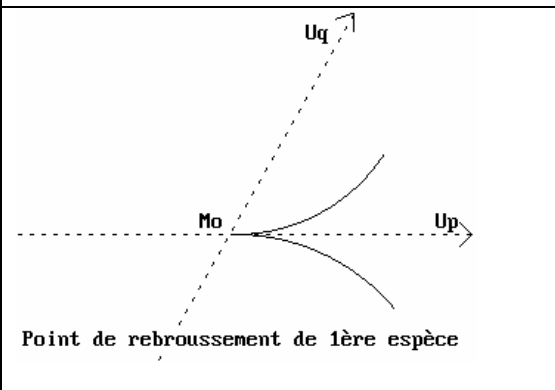
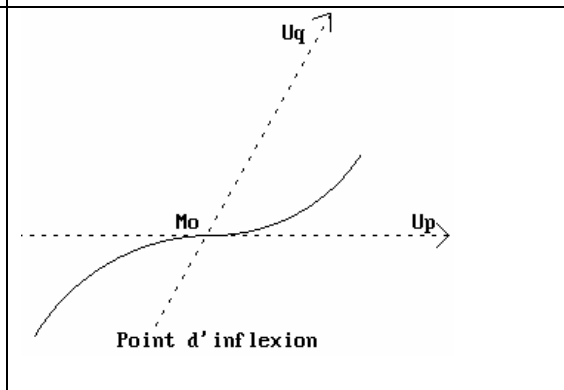
- *Cas particulier* : $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^2$. On suppose que $f: (t \mapsto (x(t), y(t)))$ est de classe suffisante au point $M_0: (x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0))$ pour trouver deux entiers p et q tels que : p est le plus petit entier naturel non nul tel que $f^{(p)}(t_0)$ n'est pas nul et q est le plus petit entier naturel strictement supérieur à p tel que $f^{(q)}(t_0)$ n'est pas colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$ (Si p n'existe pas, f est une fonction constante ; et si q n'existe pas, alors f admet pour graphe une droite). Alors, pour $M = f(t)$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \frac{(t - t_0)^p}{p!} (1 + o(1)) \cdot f^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!} (1 + o(1)) \cdot f^{(q)}(t_0).$$

(car, pour $h = t - t_0$: $\overrightarrow{M_0M} = f(t) - f(t_0) = \frac{(t - t_0)^p}{p!} (1 + h(\dots)) \cdot f^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!} (1 + h(\dots)) \cdot f^{(q)}(t_0) + o(h^p)$).

En notant : $h = t - t_0$, $u_p = f^{(p)}(t_0)$ et $u_q = f^{(q)}(t_0)$: $\overrightarrow{M_0M} = \frac{h^p}{p!} (1 + o(1)) \cdot u_p + \frac{h^q}{q!} (1 + o(1)) \cdot u_q$.

• On est ici en présence de quatre cas de figures :

| | p pair | p impair |
|----------|--|---|
| q pair |  <p>Point de rebroussement de 2ème espèce</p> |  <p>Point ordinaire</p> |
| q impair |  <p>Point de rebroussement de 1ère espèce</p> |  <p>Point d'inflexion</p> |

(On peut appliquer le même procédé dans l'espace avec un troisième vecteur $f^{(p)}(t_0)$ formant une base avec les deux précédents. Chaque case du schéma est alors divisée en deux en introduisant une troisième composante ayant une influence plus faible : la torsion).

Si $p = 1$ le point est *régulier* ; si $p = 1$ et $q = 2$ le point est *birégulier* (un point birégulier est un cas particulier de point ordinaire). Si $p \geq 2$ le point est *stationnaire*.

Si la courbe définie par f admet un point d'inflexion en t_0 , alors $q \geq 3$. Dans ce cas : $W = \det(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{\Gamma}) = 0$.

17) Cas des fonctions complexes.

- *Fonctions complexes* : $E = F = \mathbb{C}$; soit $z = x + iy$ et $f(z) = \Re_e(f(z)) + i \Im_m(f(z)) = p_x(f(z)) + i p_y(f(z))$, où p_x et p_y sont les formes linéaires coordonnées (quand \mathbb{C} est considéré comme espace euclidien). Pour que f soit

\mathbb{C} -différentiable il faut que, pour tout complexe u , $df[u]$ soit \mathbb{C} -linéaire ; donc : $df[u](i) = i.df[u](1)$. Alors, avec la formule habituelle :

$$df[u] = \frac{\partial f}{\partial x}(u).p_x + \frac{\partial f}{\partial y}(u).p_y ; \text{ d'où, comme } p_x(1) = p_y(i) = 1 \text{ et } p_x(i) = p_y(1) = 0 :$$

$$df[u](i) = \frac{\partial f}{\partial y}(u) = i.df[u](1) = i.\frac{\partial f}{\partial x}(u), \text{ d'où : } \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = i.\frac{\partial f}{\partial x}} \text{ (condition pour qu'une fonction de deux variables soit complexe).}$$

En outre, pour $f = id_{\mathbb{C}}$: $df[u] = p_x + i.p_y = dx[u] + idy[u]$. D'où : $df[u](z) = x + iy = z \Rightarrow df[u] = f$. On a ainsi : $id_{\mathbb{C}} = dz[u]$, et alors : $dz = dx + idy$. Il s'en suit que : $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}(dx + idy) = \frac{\partial f}{\partial x}dz = -i.\frac{\partial f}{\partial y}dz$.

• *Exemple de l'exponentielle* : $e^z = e^{x+iy} = e^x.\cos(y) + i.e^x.\sin(y)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = e^x.\cos(y) + i.e^x.\sin(y) = e^z$, et de même : $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = -e^x.\sin(y) + i.e^x.\cos(y) = -i.e^z$.

Finalement : $d(z \mapsto e^z) = e^z dz$; on écrit plutôt (par abus d'écriture) : $de^z = e^z dz$.

• *Plus généralement* : On peut écrire : $f' = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i.\frac{\partial f}{\partial y}$, ou encore : $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$.

On constate effectivement, sur l'exemple de l'exponentielle, qu'il revient au même de dériver e^z selon la variable z , ou $e^x.\cos(y) + i.e^x.\sin(y)$ selon la variable x .

- *Exemple du logarithme* : Les déterminations complexes du logarithme ne diffèrent que d'une constante, elles doivent donc avoir la même dérivée.

En posant $x + iy = \rho.e^{i\theta}$, alors : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, et : $\theta = \text{Arctan}(y/x)$ si $x > 0$, $\theta = \pi + \text{Arctan}(y/x)$ si $x < 0$. (Et aussi : $\theta = \pi/2$ si $x = 0$ et $y > 0$, $\theta = -\pi/2$ si $x = 0$ et $y < 0$). Cette détermination est valide sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Il s'en suit que : $\ln(z) = \frac{1}{2}.\ln(x^2 + y^2) + i.\text{Arctan}(y/x)$ si $x > 0$, $\ln(z) = \frac{1}{2}.\ln(x^2 + y^2) + i.(\pi + \text{Arctan}(y/x))$ si $x < 0$, $\ln(iy) = \ln(y) + i.\pi/2$ si $y > 0$, $\ln(iy) = \ln(-y) - i.\pi/2$ si $y < 0$. (Avec cette détermination).

D'après ce qui précède, on doit trouver que la dérivée par rapport à x de $\frac{1}{2}.\ln(x^2 + y^2) + i.\text{Arctan}(y/x)$ est $1/z$. Et, en effet : $\frac{\partial(\frac{1}{2}.\ln(x^2 + y^2) + i.\text{Arctan}(y/x))}{\partial x} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}$.

Proposition : Si f est une fonction complexe deux fois dérivable alors : $d^2f[a](u, v) = f''(a)uv$.

- *Preuve* : Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i.\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(a) = i.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})(a) = i.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans : $d^2f[a](u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)u_x v_x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)(u_x v_y + u_y v_x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)u_y v_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)((u_x v_x - u_y v_y) + i.(u_x v_y + u_y v_x)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)uv = f''(a)uv$ car la dérivation dans \mathbb{C} revient à dériver par rapport à la variable x .

• *Composée* : f et g étant des applications de la variable $z = x + iy$, alors :

$$\begin{aligned} d(g \circ f)[a] &= dg[b].df[a] = dg[f(a)].df[a] \Leftrightarrow \\ \frac{\partial g \circ f}{\partial x}(a)dx[a] + \frac{\partial g \circ f}{\partial y}(a)dy[a] &= (\frac{\partial g}{\partial x}(f(a))dx[a] + \frac{\partial g}{\partial y}(f(a))dy[a]) \circ (\frac{\partial f}{\partial x}(a)dx[a] + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy[a]) \Leftrightarrow \\ \frac{\partial g \circ f}{\partial x}(a)dz[a] &= (\frac{\partial g}{\partial x}(f(a))dz[a]) \circ (\frac{\partial f}{\partial x}(a)dz[a]) \Leftrightarrow \frac{\partial g \circ f}{\partial x}(a)id_{\mathbb{C}} = (\frac{\partial g}{\partial x}(f(a))id_{\mathbb{C}}) \circ (\frac{\partial f}{\partial x}(a)id_{\mathbb{C}}) \Leftrightarrow \\ (g \circ f)' &= (g' \circ f).f'. \end{aligned}$$

- *Applications bilinéaires* : $x \mapsto \phi(f(x), g(x))$ où ϕ est bilinéaire et où toutes les applications sont différentiables aux points convenables ; alors : $d\phi(f, g)[a] = \phi(df[a], g) + \phi(f, dg[a])$.

Étude d'un cas particulier lié à la géométrie du plan euclidien.

a) Étude algébrique.

Soit $\Phi: \mathbb{C}^{2o} \rightarrow \mathbb{C}$, définie par : $\Phi(z, z') = \bar{z}.z'$.

$z, z', z_1, z_2, z_1', z_2'$ étant des complexes quelconques et λ un réel, on a alors :

$$\begin{aligned}\Phi(z_1 + z_2, z') &= \Phi(z_1, z') + \Phi(z_2, z') ; \quad \Phi(z, z_1' + z_2') = \Phi(z, z_1') + \Phi(z, z_2') ; \\ \Phi(\lambda z, z') &= \Phi(z, \lambda z') = \lambda.\Phi(z, z') ; \quad \Phi(z', z) = \overline{\Phi(\bar{z}, \bar{z}')}.\end{aligned}$$

Soit $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$, et $z' = x' + iy' = \rho' e^{i\theta'}$. On note $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et $\vec{w}' = x'\vec{u} + y'\vec{v}$. Alors :

$$\Phi(z, z') = (xx' + yy') + i(xy' - yx') = \rho\rho' e^{i(\theta' - \theta)}.$$

En utilisant les opérations sur les vecteurs :

Le produit scalaire $(\vec{w}|\vec{w}') = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$, le déterminant $\det(\vec{w}, \vec{w}') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$; on rappelle

que : $(\vec{w}|\vec{w}') = 0 \Leftrightarrow \vec{w} \perp \vec{w}'$; $\det(\vec{w}, \vec{w}') = 0 \Leftrightarrow \vec{w}$ et \vec{w}' colinéaires. On a en outre :

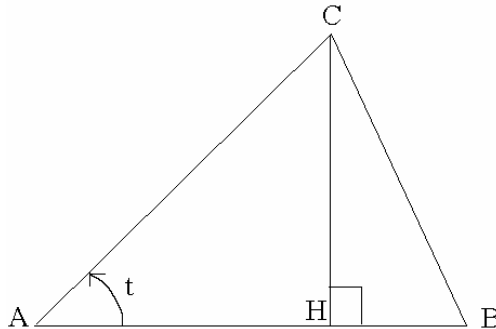
$$\Phi(z, z') = (\vec{w}|\vec{w}') + i.\det(\vec{w}, \vec{w}') = \|\vec{w}\|.\|\vec{w}'\|.(\cos(\widehat{\vec{w}, \vec{w}'}) + i.\sin(\widehat{\vec{w}, \vec{w}'})).$$

Si \vec{w} et \vec{w}' sont non nuls, on en déduit les égalités suivantes :

| | |
|---|--|
| $\cos(\widehat{\vec{w}, \vec{w}'}) = \frac{(\vec{w} \vec{w}')}{\ \vec{w}\ .\ \vec{w}'\ }$ | $\sin(\widehat{\vec{w}, \vec{w}'}) = \frac{\det(\vec{w}, \vec{w}')}{\ \vec{w}\ .\ \vec{w}'\ }$ |
|---|--|

Application au calcul de l'aire d'un triangle : $\text{aire}(ABC) = |\det(\vec{AB}, \vec{AC})|/2$.

(Car : $AB.CH = AB.AC.\sin(t)$).



Des propriétés de Φ on déduit celles du produit scalaire et du déterminant.

b) Étude analytique.

On pose $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$; on a alors :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(z_1, z_2) = z_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}(z_1, z_2) = -iz_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(z_1, z_2) = \bar{z}_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}(z_1, z_2) = i\bar{z}_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}(z_1, z_2) = z_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}(z_1, z_2) = \bar{z}_1.$$

Finalement : $d\Phi = d(\bar{z}_1 z_2) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} dy_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} dz_2 = z_2.d\bar{z}_1 + \bar{z}_1.dz_2$.

18) Compléments (hors programme).

- *Voisinage* : Une partie V de E est un voisinage d'un élément a de E si et seulement s'il contient une boule ouverte contenant a . En particulier une boule ouverte contenant a , voire de centre a , est un voisinage de a .

- *Remarque* : On dit aussi qu'un ensemble est ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points.

- *Restrictions* : Soit E' une partie de E ; une partie U' de E' est un ouvert si et seulement s'il existe un ouvert U de E tel que $U' = U \cap E'$.

Soit E' une partie de E ; une partie F' de E' est un fermé si et seulement s'il existe un fermé F de E tel que $F' = F \cap E'$.

- *Preuves* : Soit $a \in U' \subset U \Rightarrow \exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$; il s'en suit que $B'(a, r) = B(a, r) \cap E' \subset U'$. Mais c'est bien une boule ouverte de E' car : $B'(a, r) = \{u \in E', d(a, u) < r\}$.

$E' \setminus F' = E' \setminus (E' \cap F) = E' \setminus (E' \cap (E \setminus U)) = E' \setminus ((E' \cap E) \setminus (E' \cap U)) = E' \setminus U'$ c'est donc bien le complémentaire d'un ouvert de E' . (On a utilisé au passage la propriété : $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ qu'on peut prouver avec un simple diagramme ou avec les lois de Morgan).

- *Exemple* : La boule ouverte de centre 0_E et de rayon 1 du premier quadrant du plan ($x \geq 0$ et $y \geq 0$) est un quart de disque.

- *Propriétés^{xi}*. Si f est définie et continue sur une partie E' de E , alors :

L'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E' .

L'image réciproque d'un fermé de F est un fermé de E' .

L'image d'un fermé borné de E' est un fermé borné de F .

Soit K un fermé borné de E ; $\exists (a, b) \in K^2$, $\|f(a)\| = \inf\{\|y\|, y \in f(K)\}$ et $\|f(b)\| = \sup\{\|y\|, y \in f(K)\}$.

En particulier si $F = \mathbb{R}$, $\exists (a, b) \in K^2$ tels que $f(a) = \inf\{f(x), x \in K\}$ et $f(b) = \sup\{f(x), x \in K\}$.

(On dit qu'une fonction continue atteint ses bornes sur un fermé borné).

Si $E = F = \mathbb{R}$, l'image d'un intervalle est un intervalle. (C'est aussi le *théorème des valeurs intermédiaires*).

- *Remarques* :

Soit $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = 0$; alors $f(]0, 1[) = \{0\}$. L'image d'un ouvert n'est donc pas forcément un ouvert.

Pour $E' = [1, +\infty[$, $F = \mathbb{R}$ et $f(x) = 1/x$, $f(E') =]0, 1]$. L'image d'un fermé non borné n'est alors pas fermée.

- *Proposition (réciproque du §6)* : Si une suite est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente.

19) Différentiabilité (hors programme).

- *Définition* : On parle de *dérivabilité* lorsque l'ensemble de départ est une partie de \mathbb{R} ou de \mathbb{C} , sinon on parle de *différentiabilité*.

- *Application différentiable* : Étant donnés $E = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^n$ (en notant de la même façon le produit scalaire et la norme de l'un et de l'autre), soit U un ouvert de E et l'application $f : U \rightarrow G$; f est différentiable en $a \in U$ si et seulement s'il existe une application linéaire continue $\phi \in \mathcal{L}(E, G)$ (On notera $\mathcal{L}_c(E, G)$ le sous-espace des applications

linéaires continues), telle que : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - \phi(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0$.

Lorsqu'elle existe, l'application ϕ est unique et s'appelle *la différentielle de f en a* , notée : $df[a]$.^{xii}

L'application f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point a de U . La différentielle de f sur U est notée df ; c'est une application⁵ de U dans $\mathcal{L}_c(E, G)$ qui à tout a de U associe l'application linéaire $df[a]$.

- *Remarque* : Il s'en suit qu'une application linéaire continue est elle-même sa propre différentielle en tout point a de E .

- *Proposition* : Une application différentiable en a est continue en a , mais la réciproque est fautive.

- *Preuve* : Comme $df[a]$ est continue, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\|x - a\| < \eta \Rightarrow \frac{\|f(x) - f(a) - df_{(a)}(x - a)\|}{\|x - a\|} < \varepsilon$ et $\|df_{(a)}(x - a)\| < \varepsilon/2$.

Supposons que $\|f(x) - f(a)\| \geq \varepsilon$; alors, avec la seconde inégalité triangulaire : $\|f(x) - f(a) - df_{(a)}(x - a)\| > \varepsilon/2$, d'où :

$$\frac{\|f(x) - f(a) - df_{(a)}(x - a)\|}{\|x - a\|} > \eta\varepsilon/2, \text{ ce qui est absurde. Il s'en suit que } f \text{ est continue en } a \text{ car } \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Contre-exemple de la réciproque : Il suffit de prendre $E = G = \mathbb{R}$ et $f(x) = |x|$ en 0.

- *Cas particuliers* :

• Si $E = G = \mathbb{R}$, toute application linéaire est de la forme : $\phi(x) = \alpha x$; la limite à calculer devient donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \alpha(x - a)}{|x - a|} = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \alpha \right| \text{ qui est nulle si et seulement si } f \text{ est dérivable en } a, \text{ de nombre}$$

dérivé α , qu'on note alors $f'(a)$: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha = f'(a)$. Il y a alors équivalence entre différentiabilité et dérivabilité. La différentielle de f en a est l'application linéaire : $\phi(x) = df[a](x) = f'(a)x$, et la différentielle df de f associe à tout a cette application linéaire.

En particulier, l'application identique a pour différentielle en tout réel a elle-même; sa différentielle est notée plus simplement dx , c'est l'application qui à tout réel a associe l'application identique $id_{\mathbb{R}}$; donc : $dx[a] = id_{\mathbb{R}}$,

et : $dx[a](x) = x$. Il s'en suit que : $df[a] = f'(a).id_{\mathbb{R}} = f'(a).dx[a]$, et alors : $\frac{df}{dx}(a) = f'(a)$, d'où : $\frac{df}{dx} = f'$. (Attention au sens des ces opérations : Que divise-t-on ? De quelle nature est le résultat de cette division ?).

• On peut généraliser ce qui précède à $E = \mathbb{R}$ et $G = \mathbb{R}^n$; si $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, alors :

$$f \text{ dérivable} \Leftrightarrow f_k \text{ dérivable pour tout } k \ (1 \leq k \leq n), \text{ et : } f'(x) = (f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_n'(x)).$$

• Différentielles coordonnées : Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$; alors (pour $1 \leq k \leq p$) la différentielle du projecteur p_k tel que $p_k(x) = x_k$, est notée dx_k ; c'est l'application qui à tout vecteur a de E associe p_k .

• Si $E = G = \mathbb{C}$, en notant les complexes sous forme algébrique : $z = x + iy$, on peut alors considérer les trois applications suivantes : la partie réelle \Re , la partie imaginaire \Im , et l'identité $id_{\mathbb{C}}$. Les deux premières ne peuvent être considérées que si le plan complexe est pris en tant qu'espace euclidien. Par suite, la différentielle de la partie réelle n'est autre que : dx , celle de la partie imaginaire est : dy ; et celle de l'identité peut être notée : dz , car l'identité est à la fois \mathbb{R} -linéaire et \mathbb{C} -linéaire. On a alors l'égalité suivante : $dz = dx + idy$.

- *Preuve* : Il est évident que pour tout couple de complexes (u, z) : $dx[u](z) + idy[u](z) = x + iy = z = dz[u](z)$, d'où le résultat.

• Dérivées partielles : Soit f_k la k -ième application partielle de f ; alors, la dérivée de f_k appliquée à la variable x_k est : la *dérivée partielle* de f par rapport à la variable x_k , et notée : $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.

- *Proposition* : La différentiabilité de f implique celle des dérivées partielles, mais la réciproque est fautive. Pire : f peut admettre des dérivées partielles et ne pas même être continue.

- *Preuve* : Si f est différentiable en $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$, alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\|x - a\| < \eta \Rightarrow \frac{\|f(x) - f(a) - df_{(a)}(x - a)\|}{\|x - a\|} < \varepsilon$. Mais,

pour le point $x = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p)$: $\|x - a\| < \eta \Leftrightarrow |x_k - a_k| < \eta$. d'où : $\frac{\|f_k(x_k) - f_k(a_k) - df_{(a)}(0, 0, \dots, 0, x_k - a_k, 0, \dots, 0)\|}{|x_k - a_k|} < \varepsilon$, en notant :

$$f_k(x_k) = f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_p). \text{ Alors : } \left\| \frac{f_k(x_k) - f_k(a_k)}{x_k - a_k} - \frac{df_{(a)}(0, 0, \dots, 0, x_k - a_k, 0, \dots, 0)}{x_k - a_k} \right\| = \left\| \frac{f_k(x_k) - f_k(a_k)}{x_k - a_k} - df_{(a)}(e_k) \right\| < \varepsilon, \text{ où } e_k \text{ est le } k\text{-ième vecteur de la base. La proposition est ainsi démontrée.}$$

⁵ Ce type d'application est appelé : *forme différentielle*.

Contre-exemple pour la continuité : $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ (si $x \neq 0$) et $f(0, 0) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x, 0) - f(0, 0))/x = \lim_{y \rightarrow 0} (f(0, y) - f(0, 0))/y = 0$.

- *Remarque* : On a établi au passage l'égalité suivante : $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = df[a](e_k)$.

- *Corollaire* : Si f est différentiable sur U alors les dérivées partielles existent et : $df = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$.

- *Preuve* : Pour tout a de U et tout x assez voisin de a : $\sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k[a](x - a) = \sum_{k=1}^p df[a](e_k) \cdot (x_k - a_k) = df[a](\sum_{k=1}^p (x_k - a_k) \cdot e_k) = df[a](x - a)$.

On peut ainsi remplacer l'un par l'autre dans la limite établissant la différentiabilité, ce qui prouve la proposition.

20) Théorèmes prestigieux (hors programme).

- *Théorème de Borel-Lebesgue*⁶ : Soit I un segment de \mathbb{R} , J une partie de \mathbb{R} , et $(U_i)_{i \in J}$ une famille d'ouverts telle que : $I \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Alors il existe une partie finie K de J telle que : $I \subset \bigcup_{i \in K} U_i$.

- *Preuve* : Si J est finie il n'y a rien à démontrer, on suppose donc que J est infinie. Soit $I = [a, b]$; on considère l'ensemble A défini par :

$$A = \{x \in I, [x, b] \text{ recouvert par une famille finie de } U_i\}.$$

Alors $A \neq \emptyset$ car $b \in A$ ($\exists i \in J$ tel que $b \in U_i$).

A est minoré par a car tous les $[x, b]$ servant à définir A sont contenus dans I . Il en résulte que A possède une borne inférieure $m \geq a$. $\exists j \in J$ tel que $m \in U_j$, et comme c'est un ouvert : $\exists r > 0$ tel que $]m - 2r, m + 2r[\subset U_j$, donc : $[m - r, m + r] \subset U_j$.

Comme $m = \inf(A)$, $\exists x \in A$ tel que : $x \in [m, m + r[$, et une partie finie K de J telle que : $[x, b] \subset \bigcup_{i \in K} U_i$.

Il en résulte que : $[m - r, b] \subset (\bigcup_{i \in K} U_i) \cup U_j$, qui est aussi une réunion finie ; ce qui a pour conséquence que si $a \leq m - r$, alors m n'est pas la borne inférieure de A car $m - r \in A$.

Ainsi, $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < r$: $m - \varepsilon < a$; ce qui implique que $m = a$. Finalement : $a \in A$, donc I est recouvert par une famille finie d'ouverts U_i .

- *Théorème de Heine*⁷ : Soit I un segment de \mathbb{R} , et f une application continue de I dans \mathbb{R} . Alors elle y est uniformément continue : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (c'est-à-dire : η ne dépend que de ε).

- *Preuve* : Soit $I = [a, b]$, et : $y \in I$ et $\varepsilon > 0$ donnés ; $\exists \eta_x > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

Soit $J_x =]x - \eta_x/2, x + \eta_x/2[$; alors : $\bigcup_{x \in I} J_x$ recouvre I , ce dont on déduit qu'il existe un recouvrement fini d'après le théorème de Borel-Lebesgue. Il existe donc une partie finie K de I telle que : $I \subset \bigcup_{x \in K} J_x$.

On pose ensuite : $\eta = \frac{1}{2} \cdot \{\eta_x, x \in K\}$; alors : $\forall (x, y) \in I^2, \exists (a, b) \in K^2$ tels que $x \in]a - \eta/2, a + \eta/2[$ et $y \in]b - \eta/2, b + \eta/2[$.

Pour $|x - y| < \eta$, si on peut avoir $a = b$, on pose $c = a = b$, sinon $a \neq b$, mais on les choisit les plus proches possible, auquel cas on a : $]a - \eta/2, a + \eta/2[\cap]b - \eta/2, b + \eta/2[\neq \emptyset$ car sinon il y aurait une possibilité de les choisir plus proches. Soit c un élément de cette intersection ; alors :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(c) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a bien trouvé un η qui ne dépend que de ε .

- *Proposition* : Soit I un segment de \mathbb{R} , et f une application continue de I dans \mathbb{R} . Alors f est limite de deux suites adjacentes de fonctions en escalier.

- *Preuve* : Soit $I = [a, b]$; d'après le théorème de Heine : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in I^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Soit $a_{n,k} = a + k \frac{b-a}{n}$ pour k un entier naturel compris entre 0 et n ; il s'en suit que $a_{n,0} = a$ et $a_{n,n} = b$. On définit alors : $I_{n,k} = [a_{n,k}, a_{n,k+1}]$ pour $k, 0 \leq k \leq n-1$. On note : $m_{n,k} = \inf(f(I_{n,k}))$ et $M_{n,k} = \sup(f(I_{n,k}))$, et soit : $g_n(x) = m_{n,k}$ et $h_n(x) = M_{n,k}$ pour $x \in I_{n,k}$ s'il n'est pas égal à une borne, et $h_n(a_{n,k}) = g_n(a_{n,k}) = f(a_{n,k})$ (on construit ainsi des fonctions en escalier). Alors : $\forall x \in [a, b], g_n(x) \leq f(x) \leq h_n(x)$.

Si on choisit n tel que $\frac{b-a}{n} < \eta$; on peut alors écrire : $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (x, y) \in I^2, (x, y) \in I_{n,k} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

D'où : $0 < M_{n,k} - m_{n,k} < \varepsilon$, ce qui implique (en choisissant k tel que $x \in I_{n,k}$) : $\forall x \in I, 0 < h_n(x) - g_n(x) < \varepsilon$.

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in I, 0 < h_n(x) - g_n(x) < \varepsilon$.

ⁱ Soit un ensemble fini $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, et $r = \frac{1}{3} \cdot \inf\{|x_i - x_j|, 1 \leq i < j \leq n\}$. Alors : $B(x_i, r) \cap B(x_j, r) = \emptyset$ ($1 \leq i < j \leq n$).

⁶ Émile Félix Édouard Justin Borel : 1871-1956. Henri Léon Lebesgue : 1875-1941.

⁷ Heinrich Eduard Heine : 1821-1881.

Pour \mathbb{N} ou \mathbb{Z} : $\forall p, q, p \neq q, B(p, \frac{1}{3}) \cap B(q, \frac{1}{3}) = \emptyset$.

Pour \mathbb{D} ou \mathbb{Q} : $\forall x \in \mathbb{Q}$ et $\forall r > 0, B(x, r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ et $B(x, r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$.

ii On peut calculer les points d'intersection des deux premiers cercles verts, de rayons $1/2$ et dont les centres sont situés à la distance R de l'origine, répartis régulièrement : $(R, 0)$ et $(R/2, R\sqrt{3}/2)$.

Ces points d'intersection sont sur la droite passant par O et d'angle polaire $\pi/6$, donc de la forme $(\rho\sqrt{3}/2, \rho/2)$; pour être sur le premier cercle il faut donc : $(\rho\sqrt{3}/2 - R)^2 + (\rho/2)^2 = 1/4 \Leftrightarrow \rho = (R\sqrt{3} \pm \sqrt{1-R^2})/2$.

Pour que le point le plus proche de O soit à l'intérieur du cercle bleu de centre O et de rayon $1/2$, et que le point le plus éloigné soit à l'extérieur du cercle rouge de centre O et de rayon 1 , il faut : $R\sqrt{3} - \sqrt{1-R^2} < 1$ et $R\sqrt{3} + \sqrt{1-R^2} > 2$; c'est-à-dire :

$\sqrt{1-R^2} > \sup\{R\sqrt{3} - 1, 2 - R\sqrt{3}\}$. Il est donc nécessaire que : $R \geq 1/\sqrt{3}$ (on a par ailleurs : $R \leq 1 \leq 2/\sqrt{3}$, auquel cas on peut élever au carré : $1 - R^2 > \sup\{3R^2 - 2R\sqrt{3} + 1, 3R^2 - 4R\sqrt{3} + 4\} \Leftrightarrow \sup\{4R^2 - 2R\sqrt{3}, 4R^2 - 4R\sqrt{3} + 3\} < 0 \Leftrightarrow \sup\{2R(2R - \sqrt{3}), (2R - \sqrt{3})^2\} < 0$, ce qui est impossible.

La réponse est donc : Non, il n'est pas possible d'avoir seulement sept disques.

iii On écrit la définition de la limite : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, x > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Donc : $x \in]A, A + T[\Rightarrow a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a$.

iv Si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, la question est résolue. Sinon, soit $g(x) = f(x) - x, g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ et $g(1) = f(1) - 1 < 0$.

Grâce au théorème des valeurs intermédiaires : $\exists x \in]0, 1[$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire : $f(x) = x$.

v La continuité de f implique naturellement celle des ϕ_j car $\|(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_p) - a\| < \eta \Rightarrow |t - a_j| < \eta$, où l'on a obligatoirement : $a = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_p)$. **Pour la réciproque**, il suffit de donner un **contre-exemple** : soit $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ (si $(x, y) \neq (0, 0)$), et $f(0, 0) = 0$. Si $y = 0$ alors $\phi_1(t) = 0$ est continue, de même si $x = 0$: $\phi_2(t) = 0$; si $y \neq 0$, alors $\phi_1(t) = ty/(t^2 + y^2)$ est définie et continue sur l'ensemble des réels, de même pour $\phi_2(t)$ si $x \neq 0$. Par contre, la fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$ car : Pour $\varepsilon = 1/4, \forall \eta > 0$, pour $x = y = \eta/2$, alors $\|(x, y)\| = \eta\sqrt{2} < \eta$ et $|f(x, y)| = 1/2 > \varepsilon$.

La continuité de f implique naturellement celle des f_k car $\|f(x) - a\| < \varepsilon \Rightarrow |f_k(x) - a_k| < \varepsilon$ pour tout $k, 1 \leq k \leq n$. La réciproque est vraie aussi car $|f_k(x) - a_k| < \varepsilon$ pour tout $k \Rightarrow \|f(x) - a\| < \varepsilon\sqrt{n}$; on pose ensuite $\varepsilon' = \varepsilon/\sqrt{n}$. Idem pour les limites.

vi Ces ensembles sont de façon évidente des sous-espaces vectoriels. Pour le dernier, on a d'abord : $\sum |x_n|$ et $\sum |y_n|$ convergent $\Rightarrow \sum |\lambda x_n|$ et $\sum |x_n + y_n|$ convergent; on a ensuite l'inégalité triangulaire. Puis : $\sum |x_n|$ et $\sum |y_n|$ convergent $\Rightarrow \sum |x_n y_n|$ converge; car $\sum |x_n y_n| \leq \sum |x_n| \sum |y_n|$.

On peut donc prendre comme produit scalaire : $((x_n)|(y_n)) = \sum x_n y_n$. La norme associée est alors : $\|(x_n)\| = \sqrt{\sum x_n^2}$.

vii $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = Q \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|P_n - Q\| < \varepsilon)$.

On note $P_n(X) = a_{n0} + a_{n1}X + \dots + a_{nm}X^m$ et $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_m X^m$ (on harmonise les degrés, et il faut donc remarquer que m peut dépendre de n , il pourra donc arriver que les derniers α_k soient nuls. Par exemple : $P_n(X) = X^n/n$ qui converge vers le polynôme nul).

• Avec la norme euclidienne : $\|P_n - Q\| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{(a_{n0} - \alpha_0)^2 + (a_{n1} - \alpha_1)^2 + \dots + (a_{nm} - \alpha_m)^2} < \varepsilon \Rightarrow |a_{nk} - \alpha_k| < \varepsilon$ (pour tout $k, 0 \leq k \leq m$).

Soit $K = 1$ si $|x| \leq 1$ et $K = |x|^m$ sinon; alors : $|P_n(x) - Q(x)| \leq \sum_{k=0}^m |a_{nk} - \alpha_k| \cdot |x|^k \leq K \cdot \sum_{k=0}^m |a_{nk} - \alpha_k| < K(m+1)\varepsilon$.

Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = Q \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = Q(x)$.

• Réciproquement : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = Q(x) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |P_n(x) - Q(x)| < \varepsilon)$.

Pour x assez grand, on a : $|a_{n0} - \alpha_0| \ll |a_{n1} - \alpha_1| \cdot |x| \ll \dots \ll |a_{nm} - \alpha_m| \cdot |x|^m$, d'où l'on déduit : $|a_{n0} - \alpha_0| < |P_n(x) - Q(x)| < \varepsilon$.

On peut ensuite poursuivre ce raisonnement jusqu'au rang $m-1$, d'où :

$$|a_{n0} - \alpha_0 + (a_{n1} - \alpha_1)x + \dots + (a_{n,m-1} - \alpha_{m-1})x^{m-1}| < m\varepsilon.$$

Par suite : $|a_{nk} - \alpha_k| \cdot |x|^k \leq |a_{n0} - \alpha_0 + (a_{n1} - \alpha_1)x + \dots + (a_{n,m-1} - \alpha_{m-1})x^{m-1}| + |P_n(x) - Q(x)| < (m+1)\varepsilon$.

Donc, pour tout $k, 0 \leq k \leq m : |a_{nk} - \alpha_k| < (m+1)\varepsilon$.

Finalement : $\|P_n - Q\| < (m+1)^{3/2}\varepsilon$; la proposition est démontrée pour la norme euclidienne.

viii Avec la norme intégrale : $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, on considère la suite de polynômes : $P_n(X) = 1 - 2x \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{n^{2k} k!}$.

Alors : $P_n(0) = 1$ pour tout n , tandis que : $\|P_n\|^2 = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n^{2k} (k+1)!} = 1 + n^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{n^{2(k+1)} (k+1)!} = 1 + n^2 (\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{n^{2k} k!} - 1) \approx 1 + n^2 \cdot (e^{-1/n^2} - 1)$ pour n assez grand. On a donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0$, avec pourtant : $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(0) = 1$, ce qui interdit l'implication dans l'un des deux sens.

• Réciproque : En reprenant la démonstration de la norme euclidienne, on arrive à : $\int_a^b (P_n(t) - Q(t))^2 dt < \int_a^b \varepsilon^2 dt = (b-a)\varepsilon^2$, ce qui valide

l'implication dans ce sens là. Si on considère une norme intégrale plus générale : $\|P_n - Q\| < \varepsilon \Leftrightarrow \int_a^b (P_n(t) - Q(t))^2 f(t) dt < \varepsilon^2$, où f est une

fonction continue strictement positive sur $[a, b]$. En notant K la borne supérieure de f sur $[a, b]$, alors : $\int_a^b (P_n(t) - Q(t))^2 dt < K\varepsilon^2$. La démonstration précédente reste donc valide.

ix **Fonction réciproque** : Soit f bijective et de classe C^1 d'un ouvert U de $E = \mathbb{R}^p$ dans un ouvert V de $G = \mathbb{R}^n$, telle que f^{-1} soit aussi de classe C^1 sur V . Alors, comme $f \circ f^{-1} = \text{id}_U$ et $f^{-1} \circ f = \text{id}_V$, le produit de leurs matrices jacobiniennes doit être égal à la matrice identité d'ordre p pour la première et d'ordre n pour la seconde, ce n'est possible que si $p = n$.

Soit $E = F = \mathbb{R}^n, U$ et V des ouverts de E tel que f soit bijective et de classe C^1 de U dans V , et f^{-1} de classe C^1 de V dans U . Alors le produit de leurs matrices jacobiniennes en tout point est égal à la matrice identité d'ordre n . Il s'en suit que, pour $b = f(a)$:

$$J_{f^{-1}}[b] = J_f[a]^{-1}, \text{ d'où : } df^{-1}[b](x) = J_f[f^{-1}(b)]^{-1} \cdot x_B. \text{ Et ainsi : } df^{-1}[b] = (df[f^{-1}(b)])^{-1}.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que : $|h| < \eta \Rightarrow |f(a+h) - f(a) - h.f'(a)| < |h|\varepsilon$; d'où, pour $h < \inf(\eta, \varepsilon)$: $|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon.(f'(a) + \varepsilon)$. On en déduit la continuité en a .

^{xi} Soit V un ouvert de G tel que $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, et soit $y_0 \in V$ admettant un antécédent x_0 par f , $y_0 = f(x_0)$. Alors, comme f est continue en x_0 : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in B(x_0, \eta) \cap E' \Rightarrow f(x) \in B(y_0, \varepsilon)$. Mais, comme V est un ouvert, il existe ε tel que la boule $B(y_0, \varepsilon) \subset V$; il s'en suit que $B(x_0, \eta) \cap E' \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon)) \subset f^{-1}(V)$, et $f^{-1}(V)$ est donc un ouvert de E' .

Soit Φ un fermé de G ; par définition son complémentaire est un ouvert V de G . Par suite, si y_0 est un élément de V ayant un antécédent x_0 par f , il existe d'après la preuve de la propriété précédente un ouvert U de E' contenant x_0 et tel que $U \cap f^{-1}(\Phi) = \emptyset$. Il s'en suit que $f^{-1}(\Phi)$ est un fermé de E' . S'il n'existe pas y_0 ayant un antécédent dans V , alors $f^{-1}(\Phi) = E'$ qui est un fermé car $E' = E' \cap E$.

Soit F un fermé borné de E , $\Phi = f(F)$ et $y_0 \notin \Phi$. S'il existe $r > 0$ tel que $B(y_0, r) \cap \Phi = \emptyset$, on a le résultat souhaité. Sinon : $\forall \varepsilon > 0, B(y_0, \varepsilon) \cap \Phi \neq \emptyset$; soit alors : $y_n \in B(y_0, 1/n) \cap \Phi$ pour tout entier naturel n non nul. Comme y_n est dans $f(F)$, il s'en suit qu'il possède un antécédent x_n dans F . Si la suite (x_n) est stationnaire, cela signifie qu'il existe un entier N tel que $f(x_N) \in B(y_0, 1/n)$ pour tout n ; il s'en suit que $f(x_N) = y_0$, ce qui est impossible car cela signifierait que $y_0 \in \Phi$; la suite (x_n) est donc infinie. F étant un fermé borné, il est contenu dans une réunion finie de boules fermées de rayon 1 dont au moins l'une contient une infinité de termes de cette suite; soit B_1 une telle boule. La boule B_1 est elle-même contenue dans un nombre fini de boules fermées de rayon $1/2$, dont au moins l'une contient une infinité de termes de la suite. Et ainsi de suite : B_k est une boule fermée de rayon $1/k$ contenant une infinité de termes de la suite. À la limite, la suite des boules (B_k) converge vers un unique point x_0 . En outre, x_0 est un élément de F car il n'existe pas de boule ouverte de centre x_0 dont l'intersection avec F soit vide (par définition il y a toujours des termes de la suite). Il admet donc une image par f qui se trouve dans Φ , mais comme f est continue, son image est la limite de la suite (y_n) (c'est simple à établir vu ce qui précède); on a donc $f(x_0) = y_0$, ce qui est contradictoire. En conséquence il n'existe pas un tel élément y_0 hors de Φ , qui est donc un fermé. S'il n'était pas borné, il existerait une suite (x_n) d'éléments de F telle que $\|x_n\|$ admettrait une limite infinie; mais, en procédant de la même façon, en prenant des boules de plus en plus petites contenant une infinité de ces x_n , on arriverait à une absurdité : $\|x_0\| = +\infty$. La propriété est donc démontrée.

On démontre qu'une fonction continue sur un fermé borné atteint ses bornes par le même principe, en considérant une suite qui tend vers ce que l'on souhaite et en l'enserrant dans des boules de plus en plus petites.

Soit l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$; et $I_n = [a_n, b_n]$ tel que : $a_0 = b_0 \in I$, la suite (a_n) est décroissante et tend vers $\inf(I)$, la suite (b_n) est croissante et tend vers $\sup(I)$. L'image de I_n par f est un intervalle fermé borné J_n ; en outre, tous les J_n contiennent au moins un élément commun $f(a_0)$; il s'en suit que la réunion de tous les J_n est un intervalle J avec $J = f(I)$. (Pour les bornes, on utilise les mêmes principes que pour les démonstrations précédentes : principes de tiroirs, fermés emboîtés, etc..).

^{xii} On montre d'abord le lemme suivant si θ est une application linéaire telle que : $\lim_{x \rightarrow 0} \|\theta(x)\|/\|x\| = 0$ alors θ est l'application nulle.

- Preuve : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\|x\| < \eta \Rightarrow \|\theta(x)\|/\|x\| < \varepsilon$. Mais pour tout scalaire α : $\|\theta(\alpha.x)\|/\|\alpha.x\| < \varepsilon$, il s'en suit que cela ne dépend plus de η : $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall x \in E, \|\theta(x)\|/\|x\| < \varepsilon$, d'où θ est bien l'application nulle.

Soit f une application différentiable en a telle qu'il existe deux applications linéaires ϕ et ψ vérifiant la propriété. Alors :

$$\frac{\|f(x) - f(a) - \phi(x-a)\|}{\|x-a\|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - \psi(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0; \text{ d'où } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|x-a\| < \eta \Rightarrow \frac{\|f(x) - f(a) - \phi(x-a)\|}{\|x-a\|} < \varepsilon/2 \text{ et de même :}$$

$$\frac{\|f(x) - f(a) - \psi(x-a)\|}{\|x-a\|} < \varepsilon/2. \text{ D'où, grâce à l'inégalité triangulaire : } \frac{\|(\phi - \psi)(x-a)\|}{\|x-a\|} < \varepsilon. \text{ Alors, d'après le lemme : } \phi = \psi, \text{ d'où l'unicité.}$$