E) Fiche : Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

1) Définition des boules ouvertes, boules fermées, ouverts et fermés de $E = \mathbb{R}^n$, propriétés.

Boule ouverte : $B(a, r) = \{u \in E,\ d(a, u) < r\}$.
Sphère : $S(a, r) = \{u \in E,\ d(a, u) = r\}$.
Boule fermée : $\overline{B}(a, r) = \{u \in E,\ d(a, u) \leq r\} = B(a, r) \cup S(a, r)$.

U ouvert de E $\Leftrightarrow \forall a \in U,\ \exists r > 0$ t el que $B(a, r) \subset U$.
F fermé de E $\Leftrightarrow E \setminus F$ ouvert de E (le complémentaire de F dans E est un ouvert).

Propriétés :

E et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés. Toute réunion d'ouverts est un ouvert. Toute réunion finie de fermés est un fermé. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert. Toute intersection de fermés est un fermé.

Remarques : $\varnothing$ et E sont les deux seuls ensembles à la fois ouverts et fermés, ce sont en outre des boules ouvertes (rayons respectifs 0 et ∞). Les sous-espaces vectoriels de E sont des fermés. Une famille finie d'éléments de E est un fermé.

2) Parties bornées.

Partie bornée : A bornée $\Leftrightarrow \exists r > 0$ tel que $A \subset B(0, r) \Leftrightarrow \exists r > 0$ tel que $\forall x \in A,\ \|x\| < r$.
A bornée $\Leftrightarrow \exists r \geq 0$ tel que $A \subset \overline{B}(a, r) \Leftrightarrow \exists r \geq 0$ tel que $\forall x \in A,\ \|x\| \leq r$.

Exemples : Une boule de rayon fini, qu'elle soit ouverte ou fermée est une partie bornée. Un sous-espace vectoriel non réduit au vecteur nul n'est pas borné.

3) Cas particulier des réels, théorème de la borne supérieure.

Théorème de la borne supérieure : Toute partie non vide et majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (respectivement inférieure). (La borne supérieure est le plus petit des majorants ; la borne inférieure est le plus grand des minorants).

- *Un classique* : Une fonction continue de $[0, 1]$ dans lui-même admet au moins un point fixe.

4) Définition des limites et de la continuité avec la terminologie des boules ouvertes, des normes ou des distances.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E,\ \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon.$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E,\ d(a, x) < \eta \Rightarrow d(b, f(x)) < \varepsilon.$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E,\ x \in B(a, \eta) \Rightarrow f(x) \in B(b, \varepsilon).$$

f continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Donc :

f continue en a $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tel que $\forall\, x \in E$, $\|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.
f continue en a $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tel que $\forall\, x \in E$, $d(a, x) < \eta \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \varepsilon$.
f continue en a $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tel que $\forall\, x \in E$, $x \in B(a, \eta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$.

5) Applications coordonnées, applications partielles, propriétés.

Soit $f : E = \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

$\phi_j(t) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_p)$; $\phi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est la j-ème application partielle de f.

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$; $f_k : E \to \mathbb{R}$ est la k-ième application coordonnée de f.

Propriété de la limite : $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = (\lim\limits_{x\to a} f_1(x), \lim\limits_{x\to a} f_2(x), \ldots, \lim\limits_{x\to a} f_n(x))$.

Propriétés de la continuité : f continue $\Leftrightarrow$ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ continues.

f continue $\Rightarrow$ $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ continues. (La réciproque est fausse).

6) Suites à valeurs dans un espace préhilbertien réel. Convergence, sous-suites convergentes.

Les suites sont des applications de $\mathbb{N}$ (ou d'un sous-ensemble) dans $\mathbb{R}^m$, sachant que $\mathbb{N}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Convergence :

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0 , \exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N} , n \geq N \Rightarrow \|x_n - a\| < \varepsilon)$.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0 , \exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N} , n \geq N \Rightarrow d(a, x_n) < \varepsilon)$.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0 , \exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N} , n \geq N \Rightarrow x_n \in B(a, \varepsilon))$.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - a\| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(a, x_n) = 0$.
Si $x_n \neq a$ pour tout n : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B(a, \|x_n - a\|) = \{a\}$.

Si $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn})$ alors : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{kn} = a_k$ pour tout k $(1 \leq k \leq m)$.

L'ensemble des suites à valeurs dans $G = \mathbb{R}^m$ est un espace vectoriel réel. L'ensemble des suites convergentes en est un sous-espace et l'ensemble des suites convergeant vers 0_G en est un sous-espace plus petit.

Propriétés :

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|a\|$.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \| y_n) = (a \| b)$.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \wedge y_n = a \wedge b$ (si $G = \mathbb{R}^3$).
$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n.x_n = \alpha.a$ ((α_n) suite de réels).
$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ et (x_n) bornée $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n.x_n = 0_G$ ((α_n) suite de réels).
(α_n) bornée et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0_G \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n.x_n = 0_G$ ((α_n) suite de réels).

7) Dérivées partielles. Définition d'une fonction de classe C^1 à partir des dérivées partielles.

Soit ϕ_k (qu'on suppose dérivable) la k-ième application partielle de f ; alors pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$: $\phi_k'(x_k) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ (*dérivée partielle* de f par rapport à x_k).

f est de classe C^1 en a si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent dans un voisinage de a et sont continues en a.

- *Généralisation* : f est de classe C^n si et seulement si toutes ses dérivées partielles sont de classe C^{n-1} (attention, ce sont aussi des applications définies sur E), y compris si $n = +\infty$.

8) Formes linéaires coordonnées, dérivées partielles d'une forme linéaire coordonnée.

Formes linéaires coordonnées : π_k telle que, pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$: $\pi_k(x) = x_k$ est la k-ième forme linéaire coordonnée.

Elle est de classe C^1 et ses dérivées partielles sont nulles sauf $\dfrac{\partial \pi_k}{\partial x_k}$ qui est l'application constante 1. (Elle est donc de classe C^∞).

9) Définition générale d'une différentielle à l'aide des dérivées partielles et des formes linéaires coordonnées.

Une différentielle est une application qui à un vecteur associe une application linéaire ; dx_k est l'application (constante) qui à tout vecteur a associe $dx_k[a] = \pi_k$.

f de classe C^1 en a y admet une différentielle notée df telle que :

$$df = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k = (df_1, df_2, \ldots, df_n) = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} dx_k,\ \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} dx_k, \ldots, \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_n}{\partial x_k} dx_k\right).$$

a et x étant des vecteurs, avec $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$:

$df = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_p}dx_p$. Différentielle : un vecteur a pour image une application linéaire.

$df[a] = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a).\pi_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a).\pi_2 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a).\pi_p$. Application linéaire : un vecteur a pour image un vecteur.

$df[a](x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a).x_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a).x_2 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a).x_p$. C'est un vecteur.

Cas particulier : $dx_k = d\pi_k$, $dx_k[a] = \pi_k$, $dx_k[a](x) = x_k$.

Proposition : Si f est une application linéaire alors pour tout vecteur a : $df[a] = f$.

10) Gradient.

$B = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est la base canonique orthonormale de E, l'ensemble d'arrivée étant $\mathbb{R}$; a et x sont deux vecteurs quelconques de E.

$$\mathrm{grad}_f = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}.e_k \ ;\ \mathrm{grad}_f[a] = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).e_k \ ;\ df = (\mathrm{grad}_f|dx) \ ;\ df[a] = (\mathrm{grad}_f[a]|id_E) \ ;\ df[a](x) = (\mathrm{grad}_f[a]|x).$$

11) Matrices jacobiennes.

$df[a]$ étant une application linéaire, elle admet une matrice appelée : matrice jacobienne de f en a et notée $J_f[a]$.

En notant x_B la matrice colonne représentant x dans la base canonique :

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p} \end{pmatrix},\ J_f[a] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix};$$

$$df = J_f.\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \cdots \\ dx_p \end{pmatrix},\ df[a] = J_f[a].\begin{pmatrix} dx_1[a] \\ dx_2[a] \\ \cdots \\ dx_p[a] \end{pmatrix}$$

$$df[a](x) = J_f[a].x_B$$

12) Différentielle d'une somme, d'un produit, d'une composée, d'une réciproque.

F désignant l'ensemble d'arrivée.

$d(\alpha f + \beta g) = \alpha.df + \beta.dg$ (α et β étant des scalaires).	$J_{\alpha f + \beta g} = \alpha.J_f + \beta.J_g$ (α et β étant des scalaires).
$d(f\|g) = (df\|g) + (f\|dg)$.	
$d(f\wedge g) = df\wedge g + f\wedge dg$ (si $F = \mathbb{R}^3$).	
$d(fg) = df.g + f.dg$ (si $F = \mathbb{R}$).	
$d(1/f) = -df/f^2$ (si $F = \mathbb{R}$ et si f ne s'annule pas).	
$d(f/g) = (df.g - f.dg)/g^2$ (si $F = \mathbb{R}$ et si g ne s'annule pas).	
$dg\circ f[a] = dg[f(a)]\circ df[a]$ (a vecteur quelconque).	$J_{g\circ f}[a] = J_g[f(a)]\times J_f[a]$ (a vecteur quelconque).
$df^{-1}[b] = (df[f^{-1}(b)])^{-1}$ (b vecteur quelconque).	$J_{f^{-1}}[b] = (J_f[f^{-1}(b)])^{-1}$ (b vecteur quelconque).

Conséquence : Soit $h = g\circ f$ avec $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ et $g(x, y, z) \in \mathbb{R}$. Alors :

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(f(t)).x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(t)).y'(t) + \frac{\partial g}{\partial z}(f(t)).z'(t).$$

13) Différentielle d'ordre supérieur à 1, théorème de Schwarz.

f est de classe C^m si et seulement si toutes les dérivées partielles d'ordre m existent et sont continues.

Théorème de Schwarz : Si f est de classe C^m et σ une permutation sur $\{1, 2, ..., m\}$, alors :

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{\sigma(i_1)}\partial x_{\sigma(i_2)}\cdots\partial x_{\sigma(i_m)}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}}.$$

Par exemple : $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ (il est indifférent de dériver d'abord selon la variable x et ensuite selon la variable y, ou le contraire).

14) Formule de Taylor à l'ordre 1 et 2 en un point, notations de Monge, dispositions en col et en ballon.

a et h étant des vecteurs de E, f doit être de classe C^1 à l'ordre 1 et de classe C^2 à l'ordre 2 sur un ouvert U contenant $\bar{B}(a, h)$. On a dans la base canonique orthonormale de E : $h = (h_1, h_2, ..., h_p)$. Alors :

Ordre 1 :	$f(a + h) = f(a) + df[a](h) + o(\|\|h\|\|) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a).h_p + o(\|\|h\|\|)$.
Ordre 2 :	$f(a + h) = f(a) + df[a](h) + \frac{1}{2}.d^2f[a](h, h) + o(\|\|h\|\|^2)$. $f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a).h_k + \frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)h_ih_j + o(\|\|h\|\|^2)$.

15) Extremums.

Si $E = \mathbb{R}^2$ et que l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$. Soit les notations de Monge : $R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $S = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)$, $T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$, $\Delta = S^2 - RT$.

Le plan tangent au point $M_0:(a_1, a_2, f(a))$, à la surface $\mathcal{S}:(z = f(x, y))$ a pour équation :

$\Pi:(z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a).(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a).(y - a_2))$. Pour $x = a_1 + h_1$ et $y = a_2 + h_2$, soit z_a la cote du point du plan Π correspondant : $z_a = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a).h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a).h_2$. Alors : $f(a + h) = z_a + \frac{1}{2}.(R.h_1^2 + 2S.h_1h_2 + T.h_2^2) + o(h_1^2 + h_2^2)$.

- *points critiques* : $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ ($\Leftrightarrow$ $df[a] = 0$). Alors, au voisinage de a :

Si $\Delta < 0$: f admet un extremum (R et S sont de même signe). Si $R < 0$ c'est un maximum. Si $R > 0$ c'est un minimum.
Si $\Delta > 0$: f n'admet pas d'extremum.
Si $\Delta = 0$ on ne peut pas conclure (il faut procéder différemment).

16) Fonctions vectorielles, dérivabilité, classe C^m, formule de Taylor à l'ordre m, formules de Leibniz.

Si $E = \mathbb{R}$ (et que l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}^n$). La fonction f est alors appelée : fonction vectorielle.

Dérivabilité ; f est dérivable en a si et seulement si la limite suivante existe : $\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Dérivabilité à gauche ou à droite.

Si cette limite existe pour $h > 0$, f est dérivable à droite en a : $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f_+'(a)$.

Si cette limite existe pour $h < 0$, f est dérivable à gauche en a : $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f_-'(a)$.

f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a.

Idem pour les dérivées d'ordres supérieurs. Lorsqu'elles existent, la dérivée première est appelée **vecteur vitesse**, et la dérivée seconde **vecteur accélération**.

• Proposition : La dérivabilité implique la continuité.

Propriétés :
(f et g dérivables) ;
(F désignant l'ensemble d'arrivée).

$(f + g)' = f' + g'$. $(\alpha.f)' = \alpha.f'$ (α étant un scalaire). $(f\|g)' = (f'\|g) + (f\|g')$. $(f\wedge g)' = (f'\wedge g) + (f\wedge g')$ (si $F = \mathbb{R}^3$).

- *Théorème de la limite de la dérivée* : Soit f continue sur [a, b] et de classe C^1 sur]a, b] ; si f' admet une limite finie en a, alors f est de classe C^1 sur [a, b]. (Idem avec [a, b[).

Formules de Leibniz : (α, f et g étant m fois dérivables, α étant une fonction réelle).

(Démonstrations par récurrence) ;
(F désignant l'ensemble d'arrivée).

$(f\|g)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (f^{(k)}\|g^{(m-k)})$.
$(f\wedge g)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (f^{(k)}\wedge g^{(m-k)})$ (si $F = \mathbb{R}^3$).
$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(k)}g^{(m-k)}$ (si $F = \mathbb{R}$).
$(\alpha.f)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \alpha^{(k)}.f^{(m-k)}$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre m. Si f est de classe C^m (m fois dérivable et sa dérivée m-ième est continue) :

$$f(a + h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a) + \dots + \frac{h^m}{m!}.f^{(m)}(a) + o(h^m).$$