E) TD : Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

E1.1) Dans l'espace euclidien E, soit $A = \bigcap_{r>0} B(x, r)$; montrer que $x \in A$. Soit $y \neq x$, montrer que $y \notin A$. En déduire A.

E1.2) Soit E un espace euclidien ($\neq \{0_E\}$) ; montrer que, pour $0 \leq a \leq b$, l'ensemble $F = \{x \in E,\ a \leq ||x|| \leq b\}$ est un fermé de E, et qu'il existe $x_0 \in F$ tel que $||x_0|| = b$.

E1.3) Un segment $[ab]$ d'origine d'extrémités a et b d'éléments de E (espace vectoriel) est défini en extension par : $[ab] = \{t.a + (1 - t).b,\ t \in [0, 1]\}$.
Montrer que : $m \in [ab] \Leftrightarrow \exists\, k \in [0, 1],\ (m - a) = k.(b - a) \Leftrightarrow d(a, m) + d(m, b) = d(a, b)$.

E1.4) Dans $E = \mathbb{R}_1[X]$ (fonctions affines), soit une suite numérique (u_n), et (f_n) définie par : $f_1(X) = 1$, et :

$$f_{n+1}(X) = u_n.(\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f_n(k) + (\frac{1}{n}.\int_0^n f_n(t)dt).X).$$

On pose $f_n(X) = a_nX + b_n$; trouver une matrice M_n telle que : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = u_n.M_n.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Montrer que, si (u_n) est positive, il en est de même des suites (a_n) et (b_n), et si, en plus, $u_n \geq 2/n$, alors (a_n) est croissante. Donner une relation entre a_{n+1}, a_n et a_{n-1} ; en déduire que $(f_n(X))$ diverge pour $u_n = 1/2$ (par l'absurde). Étudier la convergence de la suite (f_n) pour $u_n = 2/(n + 2)$. On suppose que (a_n) converge vers le réel a, que (u_n) est positive et converge vers le réel u. Donner une condition sur le produit $a.u$ pour que ça soit possible ; donner la limite de $(f_n(X))$ en fonction de a et u.

E1.5) Soit a un réel donné de $[0, 1[$, et Θ la fonction nulle, dans $C^0([a, 1])$ l'espace (préhilbertien réel) des fonctions continues, muni du produit scalaire $(f|g) = \int_a^1 f(t)g(t)dt$. On veut étudier, dans $C^0([a, 1])$, la convergence de la suite (f_n) définie dans $[a, 1]$ par : $\{f_n(x) = n(1 - nx)$ si $x \leq 1/n$, $f_n(x) = 0$ si $x > 1/n\}$. Montrer que cette suite converge vers Θ pour $a > 0$ et diverge pour $a = 0$.

E2.1) La fonction définie sur l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\}$ par : $f(x, y) = (1 + y).\sin(x)/x$ admet-elle une limite en $(0, 0)$? Si oui, laquelle ?

E2.2) La fonction définie sur l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y\}$ par : $f(x, y) = (1 + x)/(x - y)$ admet-elle une limite finie en $(0, 0)$? Si oui, laquelle ?

E2.3) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2))/(x^2 + y^2)$, et $f(0, 0) = 1$, est-elle continue en $(0, 0)$? Est-elle de classe C^1 ?

E2.4) L'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $f(x, y, z) = (x + 2xy, z + 2xy)$ est-elle de classe C^1 ? Si oui, donner sa matrice jacobienne. L'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ par : $g(x, y) = (x^2y, x + y, \cos(y))$ est-elle de classe C^1 ? Si oui, donner sa matrice jacobienne. Donner alors la matrice jacobienne de $g \circ f$ de deux façons différentes : *a*) par calcul direct ; *b*) en utilisant la formule de composition.

E2.5) Soit $\phi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Donner les dérivées partielles secondes de f définie sur l'ensemble D, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \phi(x, y) > 0\}$, par : $f(x, y) = \ln(\phi(x, y))$. Trouver les conditions sur ϕ pour que la fonction f vérifie dans D : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ (fonction harmonique) ?

E3.1) Soit une application f de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et ϕ de $E =]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pour tout couple (ρ, θ) de E par : $\phi(\rho, \theta) = (\rho.\cos(\theta), \rho.\sin(\theta))$. Soit $g = f\circ\phi$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta)$ en fonction de ρ, θ et des dérivées partielles de f ; puis calculer : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\phi(\rho, \theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\phi(\rho, \theta))$ en fonction de ρ, θ et des dérivées partielles de g. Vérifier ces formules pour $f(x, y) = y/x$ ($x \neq 0$).

E3.2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\times]-\pi, \pi]$ par : $f(x, y) = (e^x.\cos(y), e^x.\sin(y))$; donner la matrice jacobienne de sa réciproque : *a*) en appliquant la formule de la réciproque ; *b*) par calcul direct. En déduire la réciproque de la fonction complexe : $Z = f(z) = e^z$, pour $\mathcal{R}e(Z) > 0$.

E3.3) Soit a et b deux vecteurs distincts du plan euclidien et f une fonction de $]0, +\infty[^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Dans E euclidien, on définit la fonction ϕ telle que pour u distinct de a et b : $\phi(u) = f(\|u - a\|, \|u - b\|)$; donner son gradient. En déduire la tangente aux courbes suivantes du plan affine euclidien, définies par :
a) AM + BM = 2 ; *b*) AM.BM = 1.

E3.4) Trouver les applications f de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$.

E4.1) Soit f, g et h les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, définies par :

$f(t) = (t^2 + t, 2t + 1, 3 - 4t)$, $g(t) = (2 - t, t^2 - 2t, 4 - 3t^2)$.

Calculer : $(f(t)\wedge g(t))^{(2)}$ et $(f(t)|g(t))^{(3)}$ en utilisant les formules de Leibniz.

E4.2) Déterminer s'ils existent, les extremums des fonctions : *a*) $f(x, y) = x^2 + x + y^2 - y$; *b*) $f(x, y) = \cos(xy)$; *c*) $f(x, y, z) = xyz + x + y - z$ (écrire la formule de Taylor à l'ordre deux).

E4.3) Trouver, s'il existe, un triangle de périmètre maximal inscrit dans un cercle (par exemple, le cercle trigonométrique).

E4.4) Soit f de classe C^2 définie sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et g de classe C^2 définie sur $B = \{(\rho, \theta), \rho > 0 \text{ et } |\theta| < \pi/2\}$ par : $g(\rho, \theta) = f(x, y)$. *a*) Exprimer $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en fonction de f (et ses dérivées partielles), ρ et θ. *b*) Idem avec x et y. *c*) Trouver f telle que : $y^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x.\frac{\partial f}{\partial x} + y.\frac{\partial f}{\partial y} - f$.