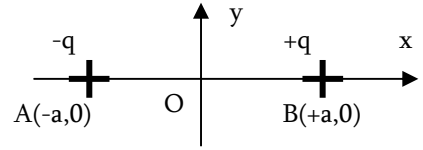


EXO TECHNIQUES N°9 – ELECTROSTATIQUE – Corrigé

1. Calcul Direct – Champs Electriques

1.a) Dipôle électrostatique de charge $-q_0$ et $+q_0$

→ Champ sur Ox ?



Étape 1 : Symétries ?

→ Tout plan contenant Ox est plan de symétrie

Conclusion sur \vec{E} ?

→ Sur l'axe Ox, on a $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$

Étape 2 : Représentation ?

→ Inutile ici, c'est très simple $\vec{dE} \parallel \vec{u}_x$

Étape 3 : Superposition ?

→ Pour $x > a$: $\vec{E}_{total} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_x}{(x+a)^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_x}{(x-a)^2}$

Projection et Simplification ? → $\vec{E}_{total} = \frac{q \cdot \vec{u}_x}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{-1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2} \right] = \frac{q \cdot \vec{u}_x}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{4ax}{(x+a)^2(x-a)^2} \right]$

Et

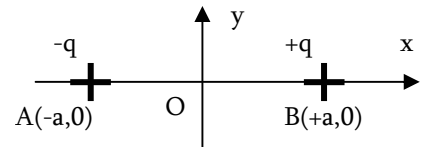
$$\vec{E}_{total} = \frac{qax}{\pi\epsilon_0(x^2 - a^2)^2} \cdot \vec{u}_x \quad (\text{pour } x > a)$$

Remarque : Pour $x < -a$: $\vec{E}_{total} = \frac{q \cdot \vec{u}_x}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{+1}{(x+a)^2} + \frac{-1}{(x-a)^2} \right] = \frac{-qax}{\pi\epsilon_0(x^2 - a^2)^2} \cdot \vec{u}_x$

Pour $-a < x < a$: $\vec{E}_{total} = \frac{q \cdot \vec{u}_x}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{-1}{(x+a)^2} + \frac{-1}{(x-a)^2} \right] = \frac{q \cdot \vec{u}_x}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{-2x^2 - 2a^2}{(x+a)^2(x-a)^2} \right] = \frac{-q(x^2 + a^2)}{2\pi\epsilon_0(x^2 - a^2)^2} \cdot \vec{u}_x$

1.b) Dipôle électrostatique de charge $-q_0$ et $+q_0$

→ Champ sur Oy ?



Étape 1 : Symétries ?

→ Plan Oyz = plan d'antisymétrie

→ Symétrie de révolution autour de Ox

Conclusion sur \vec{E} ?

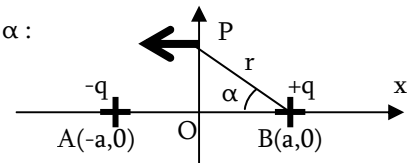
→ Dans le plan $x = 0$: on a $\vec{E} \perp \text{plan Oyz} \Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{u}_x$

→ \vec{E} ne dépend pas de l'angle : $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{u}_x = E(y) \cdot \vec{u}_x$ (x imposé à 0)

Étape 2 : Représentation ?

→ Définition du rayon r et de l'angle α :

$$\text{On a donc : } \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + y^2} \\ \cos \alpha = \frac{a}{r} \end{cases}$$



Étape 3 : Superposition ?

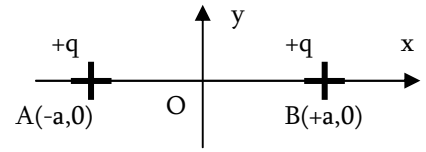
→ $\vec{E}_P = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{AP}}{AP^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{BP}}{BP^3}$

Projection et Simplification ? → $\vec{E}_{total_x} = \frac{-2q \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_x}{r^2} = \vec{E}_{total} = \frac{-q \cos^3 \alpha}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_x}{a^2}$

Remarque : On peut tout à fait utiliser une autre angle, par exemple $\beta = (\text{OPB})$ qui modifierait à peine les expressions, le $\cos \alpha$ se transformant en $\sin \beta$

1.c) Deux charges ponctuelles +q0

→ Champ sur Ox ?



Etape 1 : Symétries ?

→ Tout plan contenant Ox est plan de symétrie

Conclusion sur \vec{E} ?

→ Sur l'axe Ox, on a $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$

Etape 2 : Représentation ?

→ Inutile ici, c'est très simple $d\vec{E} \parallel \vec{u}_x$

Etape 3 : Superposition ?

→ Pour $x > a$: $\vec{E}_{total} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_x}{(x+a)^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_x}{(x-a)^2}$

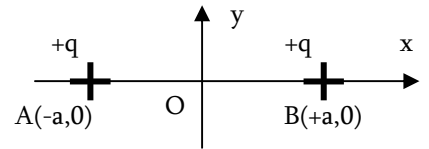
Projection et Simplification ? → $\vec{E}_{total} = \frac{q \cdot \vec{u}_x}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2} \right] = \frac{q \cdot \vec{u}_x}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{2(x^2+a^2)}{(x+a)^2(x-a)^2} \right]$

Et
$$\vec{E}_{total} = \frac{q(x^2+a^2)}{2\pi\epsilon_0(x^2-a^2)^2} \cdot \vec{u}_x \quad (\text{pour } x > a)$$

Remarque : → Expressions à adapter dans les cas où $x < -a$ et $-a < x < a$.

1.d) Deux charges ponctuelles +q0

→ Champ sur Oy ?



Etape 1 : Symétries ?

→ Plan Oyz = plan de symétrie

→ Symétrie de révolution autour de Ox

Conclusion sur \vec{E} ?

→ Dans le plan $x = 0$: on a $\vec{E} \parallel \text{plan Oyz}$

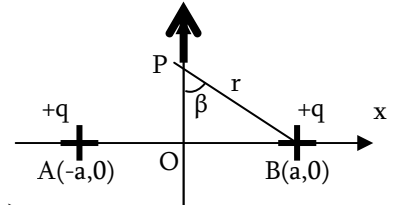
→ \vec{E} ne dépend pas de l'angle : $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{u}_y = E(y) \cdot \vec{u}_y$ (x imposé à 0)

Etape 2 : Représentation ?

→ Définition du rayon r et de l'angle β :

On a donc :

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + y^2} \\ \cos \beta = \frac{y}{r} \end{cases}$$



Etape 3 : Superposition ?

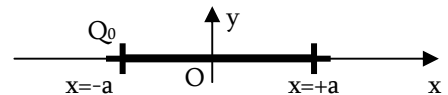
→ $\vec{E}_{total} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{AP}}{AP^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{BP}}{BP^3}$

Projection et Simplification ? → $\vec{E}_{total_y} = \frac{2q \cos \beta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_y}{r^2} = \frac{\vec{E}_{total} = \frac{q \cos^3 \beta}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_y}{y^2}}$

Remarque : Même remarque : On peut tout à fait utiliser une autre angle, par exemple $\alpha = (\text{OBP})$ qui modifierait à peine les expressions, le $\cos \beta$ se transformant en $\sin \alpha$.

1.e) Segment uniformément chargé de charge totale Q0

→ Champ sur Ox ?



Etape 1 : Symétries ?

→ Tout plan contenant Ox est plan de symétrie

Conclusion sur \vec{E} ?

→ Sur l'axe Ox, on a $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$

Etape 2 : Représentation ?

→ Inutile ici, c'est très simple $d\vec{E} \parallel \vec{u}_x$

Etape 3 : Superposition ?

→ Pour $x > a$: $\vec{E}_{total} = \int_{-a}^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{(x_M - x)^2} \cdot \vec{e}_x$

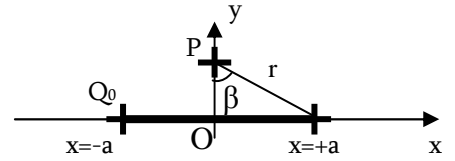
Charge linéique : → Charge totale : $Q_0 = \int_{-a}^a \lambda dl = 2a\lambda$, donc λ constante tq $\lambda = \frac{Q_0}{2a}$

Projection et Simplification ? $\rightarrow \vec{E}_{total} = \frac{\lambda \cdot \vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{-a}^a \frac{dx}{(x_M - x)^2} = \frac{\lambda \cdot \vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{(x_M - x)} \right]_{-a}^{+a}$

$$\rightarrow \vec{E}_{total} = \frac{\lambda \cdot \vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{(x_M - a)} - \frac{1}{(x_M + a)} \right) = \frac{a\lambda}{2\pi\epsilon_0 (x_M^2 - a^2)} \cdot \vec{e}_x$$

1.f) Segment uniformément chargé de charge totale Q_0

\rightarrow Champ sur Oy ?



Etape 1 : Symétries ?

\rightarrow Plan Oyz = plan de symétrie
 \rightarrow Symétrie de révolution autour de Ox

Conclusion sur \vec{E} ?

\rightarrow Dans le plan $x = 0$: on a $\vec{E} \parallel \text{plan Oyz}$
 $\rightarrow \vec{E}$ ne dépend pas de l'angle : $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{u}_y = E(y) \cdot \vec{u}_y$ (x imposé à 0)

Etape 2 : Représentation ?

\rightarrow Définition du rayon r et de l'angle β :
$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + y^2} \\ \cos \beta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Charge linéique :

\rightarrow Charge totale : $Q_0 = \int_{-a}^a \lambda dl = 2a\lambda$, donc λ constante tq $\lambda = \frac{Q_0}{2a}$

Etape 3 : Superposition ?

$\rightarrow \vec{E}_P = \int_{-a}^a \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{MP}}{MP^3}$

Projection et Simplification ?

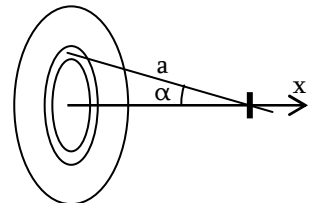
\rightarrow On ne prend que la coord sur y : $\vec{E}_P = \int_{-a}^a \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \beta}{r^2} \cdot \vec{e}_y$

\rightarrow Changement de variable : $x = y \tan \beta \Rightarrow dx = y \frac{d\beta}{\cos^2 \beta}$

$$\rightarrow \vec{E}_P = \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos \beta d\beta}{y} \cdot \vec{e}_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\sin \beta_0 - \sin -\beta_0) \cdot \vec{e}_y = \frac{2\lambda \sin \beta_0}{4\pi\epsilon_0 y} \cdot \vec{e}_y = \vec{E}_{total} = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{a^2 + y^2}} \cdot \vec{e}_y$$

1.g) Disque uniformément chargé de charge totale Q_0

\rightarrow Champ sur Ox ?



Etape 1 : Symétries ?

\rightarrow Tout plan contenant Ox est plan de symétrie

Conclusion sur \vec{E} ?

\rightarrow Sur l'axe Ox, on a $\vec{E} = E(x) \vec{u}_x$

Etape 2 : Représentation ?

\rightarrow Définition de la distance a et de l'angle α :
$$\begin{cases} a = \sqrt{r^2 + x^2} \\ \cos \alpha = \frac{x}{a} \end{cases}$$

Charge surfacique :

\rightarrow Charge totale : $Q_0 = \iint \sigma dS = \sigma \pi R^2$, donc σ constante tq $\sigma = \frac{Q_0}{\pi R^2}$

Etape 3 : Superposition ?

$\rightarrow \vec{E}_{total} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{MP}}{MP^3}$, avec $dS = dr \cdot r d\theta$

Projection et Simplification ?

\rightarrow Coord sur Ox : $\vec{E}_{total} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\sigma \cos \alpha \cdot dr \cdot r d\theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot a^2} \cdot \vec{e}_x$

\rightarrow Changement de variable : $r = x \tan \alpha \Rightarrow dr = x \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$

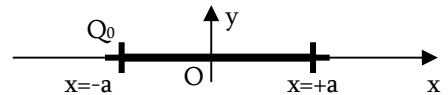
$$\rightarrow \text{Calculs : } \vec{E}_{total} = \frac{2\pi\sigma \cdot \vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^R \frac{\cos \alpha \cdot dr \cdot r}{a^2} = \frac{2\pi\sigma \cdot \vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^R \frac{\cos^3 \alpha \cdot dr \cdot r}{x^2} = \frac{2\pi\sigma \cdot \vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=0}^{\alpha_0} \frac{\cos \alpha \cdot d\alpha \cdot r}{x}$$

$$\rightarrow \text{Calculs : } \vec{E}_{total} = \frac{\sigma \cdot \vec{e}_x}{2\epsilon_0} \int_{\alpha=0}^{\alpha_0} \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_0) \cdot \vec{e}_x = \vec{E}_{total} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \cdot \vec{e}_x$$

2. Calcul Direct – Potentiel

2.a) Segment uniformément chargé de charge totale Q_0

→ Potentiel sur Ox ?



Étape 1 : Symétries ?

→ Inutile ici... on est sur l'axe : $y = z = 0 \rightarrow V = V(x_M)$

Étape 2 : Représentation ?

→ Aucun angle à définir...

Charge linéique :

→ Charge totale : $Q_0 = \int_{-a}^a \lambda dl = 2a\lambda$, donc λ constante tq $\lambda = \frac{Q_0}{2a}$

Étape 3 : Superposition ?

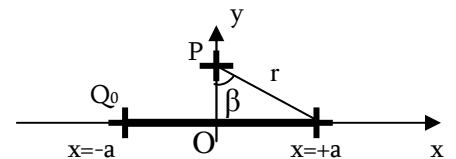
→ Pour $x > a$: $V = \int_{-a}^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{(x_M - x)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{(x_M - x)}$

Simplification ?

$$\rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-\ln(x_M - x) \right]_{-a}^a = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{x_M + a}{x_M - a} \right)$$

2.b) Segment uniformément chargé de charge totale Q_0

→ Potentiel sur Oy ?



Étape 1 : Symétries ?

→ Symétrie de révolution autour de Ox

Conclusion sur V ?

→ V ne dépend pas de l'angle : $V = V(r) = V(y)$ (x imposé à 0)

Étape 2 : Représentation ?

→ Déf de la distance r – Pas d'angle car on a une formule d'intégration.

Charge linéique :

→ Charge totale : $Q_0 = \int_{-a}^a \lambda dl = 2a\lambda$, donc λ constante tq $\lambda = \frac{Q_0}{2a}$

Étape 3 : Superposition ?

→ Pour $x > a$: $V = \int_{-a}^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{y^2 + x^2}}$

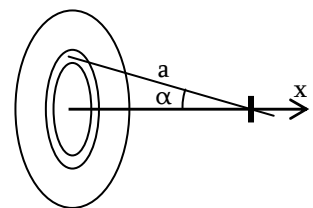
Simplification ?

→ On se ramène à la formule donnée $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$

$$\rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a/y}^{a/y} \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}} = V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{y^2 + a^2} + a}{\sqrt{y^2 + a^2} - a} \right)$$

2.c) Disque uniformément chargé de charge totale Q_0

→ Potentiel sur Ox ?



Étape 1 : Symétries ?

→ Symétrie de révolution autour de Ox

Conclusion sur V ?

→ V ne dépend pas de l'angle : $V = V(r) = V(y)$ (x imposé à 0)

Étape 2 : Représentation ?

→ Définition de la distance a et de l'angle α :

$$\begin{cases} a = \sqrt{r^2 + x^2} \\ \cos \alpha = \frac{x}{a} \end{cases}$$

Charge surfacique :

→ Charge totale : $Q_0 = \iint \sigma dS = \sigma \pi R^2$, donc σ constante tq $\sigma = \frac{Q_0}{\pi R^2}$

Étape 3 : Superposition ?

→ $V_{total}(M) = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 a} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0 a_{PM}} \cdot d\theta = \int_{r=0}^R \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0 a_{PM}}$

→ Changement variable

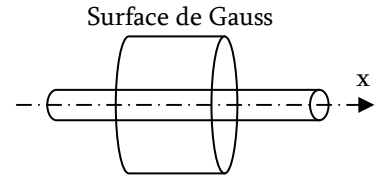
$$\begin{cases} a = \sqrt{r^2 + x^2} \\ da = \frac{1}{2} \cdot \frac{2r \cdot dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{total} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{a=|x|}^{\sqrt{R^2 + x^2}} da = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + x^2} - |x| \right)$$

3. Théorème de Gauss – Champ Electrique

3.a) Fil infini uniformément chargé de densité λ

→ Champ en tout point ?



Etape 1 : Symétries ? → Symétrie cylindrique autour de Ox (invariance translation et rotation)
 Conclusion sur \vec{E} ? → \vec{E} est radial : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

Etape 2 : Surface de Gauss ? → Cylindre de même axe, M étant sur l'un de ses cotés (où on cherche \vec{E})
 (Coté du cylindre $\perp \vec{E} \rightarrow \phi = E \cdot S$ / Bases du cylindre $\parallel \vec{E} \rightarrow \phi = 0$)

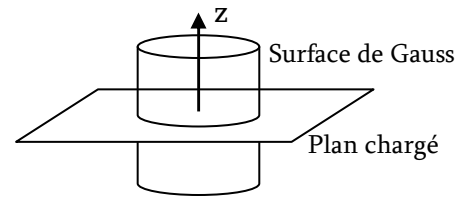
Etape 3 : Application du théorème ? → $\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$

Conclusion :
$$\vec{E} = E(r) \cdot \vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \cdot \vec{u}_r$$

Remarque : On retrouve bien la même expression que celle du cours obtenue avec le calcul direct

3.b) Plan infini uniformément chargé de densité σ

→ Champ en tout point ?



Etape 1 : Symétries ? → Invariance par translation suivant tout axe contenu dans le plan
 → Tout plan perpendiculaire au plan est plan de symétrie
 Conclusion sur \vec{E} ? → \vec{E} ne dépend que de z (distance au plan)
 → \vec{E} est parallèle à Oz : $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$

Etape 2 : Surface de Gauss ? → Cylindre d'axe Oz, M étant sur l'une des bases (où on veut calculer \vec{E})
 (Coté du cylindre $\parallel \vec{E} \rightarrow \phi = 0$ / Bases du cylindre $\perp \vec{E} \rightarrow \phi = E \cdot S$)

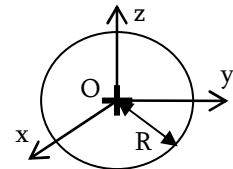
Etape 3 : Application du théorème ? → $\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r > 0) \cdot S - E(r < 0) \cdot S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$

Mais par symétrie : $E(r < 0) = -E(r > 0)$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = E(z) \cdot \vec{u}_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \vec{u}_z & \text{pour } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \vec{u}_z & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

3.c) Sphère uniformément chargée de densité ρ

→ Champ en tout point ?



Etape 1 : Symétries ? → Symétrie sphérique
 Conclusion sur \vec{E} ? → \vec{E} est radial : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

Etape 2 : Surface de Gauss ? → Sphère de centre O passant par M (point où on veut calculer \vec{E})
 (toute la sphère est $\perp \vec{E} \rightarrow \phi = E \cdot S$)

Etape 3 : Application du théorème ? → $\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{si } r < R \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{si } r > R \end{cases}$

Conclusion :
$$\vec{E}(r) = E(r) \cdot \vec{u}_r = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \cdot \vec{u}_r & \text{pour } r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{u}_r & \text{pour } r > R \end{cases}$$